

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC GIAO THÔNG VẬN TẢI

NGUYỄN ĐĂNG ĐIỂM

PHÁT TRIỂN PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ
HỮU HẠN NGẪU NHIÊN PHÂN TÍCH
ỨNG XỬ CƠ HỌC CỦA DẦM, CỘT XÉT
TỚI PHÂN BỐ NGẪU NHIÊN TÍNH
CHẤT VẬT LIỆU

Ngành: CƠ KỸ THUẬT

Mã số: 9520101

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ

Hà Nội - 2026

Công trình được hoàn thành tại:
Trường Đại học Giao thông vận tải

Người hướng dẫn khoa học:

1. PGS.TS. Tạ Duy Hiền

Trường Đại học Giao thông vận tải

2. PGS.TS. Đào Sỹ Đán

Trường Đại học Giao thông vận tải

Phản biện 1:

Phản biện 2:

Phản biện 3:

Luận án được bảo vệ trước Hội đồng chấm luận án cấp Trường
tại Trường Đại học Giao thông vận tải
vào hồi giờ ngày tháng năm

Có thể tìm hiểu Luận án tại thư viện:

- Thư viện Quốc Gia Việt Nam

- Thư viện Trường Đại học Giao thông vận tải

1. Lý do chọn đề tài

Mô hình cơ học tất định truyền thống bỏ qua sự biến thiên không gian của tính chất vật liệu, do đó chưa phản ánh được bản chất ứng xử bất định của kết cấu. Mặc dù phương pháp phần tử hữu hạn ngẫu nhiên (SFEM) kết hợp cùng các kỹ thuật rời rạc hóa trường ngẫu nhiên đã được phát triển, các phân tích trên cấu kiện dầm và cột hiện nay phần lớn vẫn bị giới hạn ở mô hình ngẫu nhiên một chiều dọc trục. Để mô phỏng đúng bản chất ngẫu nhiên không gian của tính chất vật liệu, luận án xây dựng một khung phân tích SFEM tích hợp trực tiếp trường ngẫu nhiên đa chiều (2D, 3D). Đóng góp này không chỉ giải quyết hạn chế của các mô hình hiện hữu mà còn cung cấp công cụ dự báo đáng tin cậy cho thiết kế kết cấu.

2. Mục tiêu nghiên cứu

Mục tiêu của luận án là phát triển phương pháp phần tử hữu hạn ngẫu nhiên (SFEM) nhằm phân tích đáp ứng cơ học ngẫu nhiên của dầm và cột, xét đến đặc tính biến thiên không gian (2D, 3D) của tính chất vật liệu. Cụ thể, nghiên cứu phát triển kỹ thuật tích phân trọng số để rời rạc hóa trường ngẫu nhiên liên tục, kết hợp với phương pháp nhiễu loạn qua khai triển Taylor bậc nhất nhằm thiết lập trực tiếp các đặc trưng thống kê của dầm, cột như chuyển vị, giá trị riêng tần số dao động tự do và tải trọng tới hạn.

Để xác thực độ tin cậy của phương pháp đề xuất, kết quả phân tích được đối sánh với các nghiên cứu đã công bố, đồng thời kiểm chứng chéo thông qua mô phỏng Monte Carlo (MCS) kết hợp phương pháp biểu diễn phổ (SRM) được xây dựng độc lập. Trên cơ sở đó, luận án tiến hành phân tích tham số nhằm đánh giá định lượng mức độ ảnh hưởng của các đặc trưng trường ngẫu nhiên (bao gồm hệ số biến thiên, chiều dài tương quan và tương quan chéo) đến ứng xử ngẫu nhiên của dầm và cột.

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Đối tượng nghiên cứu của luận án là cấu kiện thanh phẳng (dầm, cột) tiết diện chữ nhật không đổi, trong đó các tính chất vật liệu (mô đun đàn hồi, mật độ khối lượng) ngẫu nhiên trong không gian được mô hình hóa bằng trường ngẫu nhiên đa chiều, Gaussian, dừng và có tương quan chéo. Dựa trên mô hình này, luận án tập trung giải quyết ba bài toán cơ bản của cơ học: (i) ứng xử tĩnh ngẫu nhiên, (ii) đặc trưng động lực học tuyến tính, và (iii) bài toán ổn định Euler của cột chịu nén đúng tâm.

Về phạm vi nghiên cứu, mô hình SFEM được phát triển dựa trên lý thuyết dầm Euler–Bernoulli cho bài toán uốn phẳng, bỏ qua các hiệu ứng thứ cấp (mô men xoắn, sai lệch tâm hình học - tâm uốn/nén). Bên cạnh đó, luận án giới hạn hệ số biến thiên của trường ngẫu nhiên vật liệu ở mức $COV \leq 20\%$. Kết quả nghiên cứu tập trung xác định các đặc trưng thống kê (kỳ vọng, phương sai, COV) của chuyển vị, giá trị riêng dao động tự do và tải trọng tới hạn, nhằm đánh giá tác động của sự biến thiên không gian của tính chất vật liệu lên ứng xử ngẫu nhiên của dầm, cột.

4. Ý nghĩa khoa học và ý nghĩa thực tiễn của luận án

Luận án đóng góp tri thức mới vào cơ học ngẫu nhiên bằng việc phát triển SFEM phân tích đáp ứng ngẫu nhiên của dầm, cột khi tính chất vật liệu biến đổi ngẫu nhiên trong không gian (2D, 3D). Qua đó, nghiên cứu góp phần hoàn thiện khung lý thuyết phân tích kết cấu (tĩnh, đặc trưng động lực học tuyến tính và ổn định) trong điều kiện bất định.

Về mặt thực tiễn, luận án cung cấp cơ sở mô phỏng và dự báo đáp ứng ngẫu nhiên của dầm, cột, hỗ trợ thiết kế kết cấu đảm bảo độ tin cậy. Việc mô hình hóa bằng trường ngẫu nhiên không gian phản ánh chính xác sự không đồng nhất trong sản xuất và thi công. SFEM đề xuất có khả năng ứng dụng trực tiếp vào thiết kế các công trình yêu cầu độ an toàn, cũng như phục vụ công tác giám sát và bảo trì chủ động.

5. Phương pháp nghiên cứu

Để giải quyết các mục tiêu khoa học, luận án sử dụng kết hợp nền tảng giải tích cơ học dựa trên lý thuyết dầm Euler-Bernoulli để thiết lập các phương trình vi phân chủ đạo. Tiếp đó, kỹ thuật tích phân trọng số được phát triển nhằm rời rạc hóa các trường ngẫu nhiên không gian đa chiều (2D, 3D) của vật liệu thành các biến ngẫu nhiên cơ bản, tạo cơ sở để xây dựng phương pháp phần tử hữu hạn ngẫu nhiên (SFEM) kết hợp nhiễu loạn bậc nhất giúp tính toán trực tiếp các đặc trưng thống kê của đáp ứng cơ học mà không cần tính lặp. Cuối cùng, độ chính xác và sự hội tụ của mô hình SFEM được xác thực độc lập thông qua mô phỏng Monte Carlo (MCS) và các nghiên cứu đã công bố, làm tiền đề cho việc khảo sát tham số định lượng nhằm xác lập các quy luật ảnh hưởng của trường ngẫu nhiên đến ứng xử của kết cấu.

CHƯƠNG I: TỔNG QUAN VỀ PHÂN TÍCH NGẪU NHIÊN KẾT CẤU

1.1. Biến ngẫu nhiên

Phép thử ngẫu nhiên là thí nghiệm thực hiện trong cùng điều kiện nhưng kết quả không thể dự đoán chắc chắn. Không gian xác suất của đại lượng ngẫu nhiên X ký hiệu là (Ω, F, P) , trong đó Ω là không gian mẫu, F là sigma-đại số và P là hàm xác suất ánh xạ vào đoạn $[0, 1]$. Biến ngẫu nhiên X (liên tục hoặc rời rạc) là một hàm xác định trên Ω . Đối với biến ngẫu nhiên X liên tục, các đặc trưng cơ bản gồm hàm mật độ xác suất $f_X(x)$ và hàm phân phối tích lũy $F_X(x)$.

1.2. Trường ngẫu nhiên

Hàm ngẫu nhiên được phân loại thành quá trình ngẫu nhiên (biến độc lập là thời gian t) hoặc trường ngẫu nhiên $T(\mathbf{x}, \theta)$ (nếu biến độc lập là tọa độ không gian $\mathbf{x}$). Về mặt thống kê, đặc tính của trường ngẫu nhiên được xác định thông qua hàm kỳ vọng, hàm phương sai và các đại lượng tương quan không gian (tự tương quan, tự hiệp phương

sai và tương quan chéo). Trường ngẫu nhiên Gaussian được định nghĩa trọn vẹn qua ba đặc trưng này; trường ngẫu nhiên dừng đòi hỏi kỳ vọng, phương sai là hằng số và hàm tự tương quan chỉ phụ thuộc vào khoảng cách không gian.

1.3. Tổng quan các phương pháp biểu diễn trường ngẫu nhiên

1.3.1. Các phương pháp biểu diễn trường ngẫu nhiên Gaussian

1.3.1.1. Nhóm các phương pháp biểu diễn điểm

Trường ngẫu nhiên $T(x, \theta)$ được rời rạc thành các biến ngẫu nhiên tại một hoặc vài điểm x_i thuộc phần tử. Độ lớn, giá trị trung bình và phương sai của biến ngẫu nhiên được xác định trực tiếp thông qua giá trị của trường ngẫu nhiên tại vị trí $x = x_i$. Sự tương quan giữa hai điểm được tính gần đúng thông qua hàm tự tương quan.

1.3.1.2. Nhóm các phương pháp biểu diễn trung bình

a. Phương pháp trung bình trên miền phần tử

Phương pháp trung bình trên miền phần tử ([121]) xấp xỉ trường ngẫu nhiên $T(x, \theta)$ thành một biến ngẫu nhiên X_e bằng cách lấy trung bình thông qua tích phân trên toàn miền phần tử V_e . Dựa vào lưới chia gồm N_e phần tử, trường ngẫu nhiên được biểu diễn thành véc tơ ngẫu nhiên hữu hạn $\{X_1, X_2, \dots, X_{N_e}\}$. Giá trị trung bình và ma trận hiệp phương sai của véc tơ này được xác định thông qua việc lấy tích phân hàm trung bình và hàm hiệp phương sai của trường ngẫu nhiên gốc trên miền phần tử V_e .

b. Kỹ thuật tích phân trọng số

Phương pháp tích phân trọng số chuyển đổi trường ngẫu nhiên liên tục thành một tập hữu hạn các biến ngẫu nhiên cơ bản X_ω . Kỹ thuật này lấy tích phân của trường ngẫu nhiên với các đa thức không gian trên toàn miền phần tử V_e . Nhờ đó, ma trận độ cứng của phần tử được phân tách, trong đó thành phần ngẫu nhiên được biểu diễn dưới dạng tổng tuyến tính của các biến ngẫu nhiên cơ bản. Cách tiếp cận này tách biệt hoàn toàn phần ngẫu nhiên khỏi phần tĩnh định cho phép tích hợp hiệu quả vào mô hình SFEM để phân tích kết cấu có vật liệu ngẫu nhiên đa chiều mà vẫn kiểm soát khối lượng tính toán dựa trên lưới chia phần tử.

1.3.1.3. Nhóm các phương pháp mở rộng chuỗi biểu diễn trường ngẫu nhiên

a. Phương pháp mở rộng chuỗi Karhunen-Loève ($K-L$)

Phương pháp khai triển Karhunen-Loève ($K-L$) biểu diễn trường ngẫu nhiên liên tục qua tập hữu hạn các biến ngẫu nhiên không tương quan, dựa trên phân tích phổ hàm tự hiệp phương sai thông qua phương trình tích phân Fredholm. Nhờ tính trực giao của hàm riêng, trường ngẫu nhiên được phân tách thành thành phần tĩnh định và thành phần ngẫu nhiên. Trong SFEM, việc cắt cụt chuỗi $K-L$ ở N số hạng đầu mang lại xấp xỉ tối ưu theo nghĩa bình phương tối thiểu với sai số nhỏ nhất, dù hệ quả tất yếu là phương sai xấp xỉ luôn nhỏ hơn trường gốc.

b. Phương pháp mở rộng chuỗi trực giao

Phương pháp mở rộng chuỗi trực giao xấp xỉ trường ngẫu nhiên dựa trên một tập hàm trực giao cơ sở được định nghĩa trước. Để triệt tiêu sự tương quan của hệ biến ngẫu nhiên, phép phân tích phổ ma trận tự hiệp phương sai được áp dụng. Qua đó, trường ngẫu nhiên được biểu diễn gọn gàng qua một chuỗi cắt cụt N số hạng, là sự kết hợp tuyến tính giữa các hàm cơ sở, đặc trưng phổ và tập biến ngẫu nhiên chuẩn tắc hoàn toàn độc lập.

c. Phương pháp ước lượng tuyến tính tối ưu mở rộng

Phương pháp ước lượng tuyến tính tối ưu rời rạc hóa trường ngẫu nhiên thành một véc tơ các biến ngẫu nhiên tại các nút của lưới xấp xỉ. Bằng cách áp dụng phân rã phổ cho ma trận tự hiệp phương sai, véc tơ nút này được phân tách thông qua các trị riêng, véc tơ riêng và hệ biến ngẫu nhiên chuẩn tắc độc lập. Cuối cùng, trường ngẫu nhiên tại một điểm x bất kỳ được xấp xỉ tuyến tính dựa trên đặc trưng phổ của hệ nút cơ sở và véc tơ hiệp phương sai tương quan giữa điểm x với các nút đó.

d. Phương pháp tiếp cận phổ để biểu diễn trường ngẫu nhiên

Phương pháp biểu diễn phổ xấp xỉ trường ngẫu nhiên dừng bằng một chuỗi lượng giác hữu hạn, trong đó biên độ được nội suy từ hàm mật độ phổ công suất và tính bất định được đưa vào duy nhất thông qua các góc pha ngẫu nhiên phân bố đều. Quá trình tính toán được tối ưu bằng cách giới hạn miền tần số tại tần số sóng cắt ω_c , giúp mẫu bảo toàn chặt chẽ cấu trúc tương quan gốc.

1.3.2. Các phương pháp biểu diễn trường ngẫu nhiên Non-Gaussian

1.3.2.1. Các phương pháp biến đổi tương quan

a. Phương pháp biến đổi tương quan

Phương pháp biến đổi tương quan biểu diễn trường ngẫu nhiên Non-Gaussian dừng từ một trường Gaussian chuẩn tắc thông qua phép biến đổi đẳng xác suất điểm-điểm. Về mặt toán học, giá trị của trường Non-Gaussian tại một vị trí được ánh xạ trực tiếp từ trường Gaussian thông qua hàm phân phối tích lũy Gaussian chuẩn tắc và nghịch đảo của hàm phân phối cận biên mục tiêu. Ràng buộc khắt khe nhất của kỹ thuật này là hàm mật độ phổ công suất và phân bố cận biên của trường Non-Gaussian phải thỏa mãn điều kiện tương quan thống kê, vốn được thiết lập giải tích thông qua tích phân của hàm mật độ xác suất Gauss hai biến.

b. Phương pháp mở rộng trường ngẫu nhiên biến đổi

Đây là kỹ thuật mô phỏng trường ngẫu nhiên Non-Gaussian dựa trên quy trình ánh xạ lặp tích hợp khai triển Karhunen-Loève vào chu trình lặp nhằm khắc phục hiện tượng biến dạng hàm mật độ xác suất đối với các trường có độ lệch lớn. Sự cải tiến này giúp thuật toán tạo thành công các hàm mẫu khớp chính xác đồng thời với cả hai mục tiêu: hàm phân phối cận biên và hàm mật độ phổ công suất.

1.3.2.2. Các phương pháp dựa trên triển khai đa thức nhiễu động

Phương pháp triển khai đa thức nhiễu động giải phương trình vi phân ngẫu nhiên bằng cách xấp xỉ trường Non-Gaussian thông qua họ đa thức trực giao Askey. Bằng việc áp dụng phép chiếu Galerkin, hệ thống ngẫu nhiên phức tạp được chuyển đổi hoàn toàn thành một hệ phương trình tất định, giúp tối ưu hóa số chiều tính toán và đạt tốc độ hội tụ vượt trội theo cấp số nhân.

1.4. Tổng quan về phương pháp phần tử hữu hạn ngẫu nhiên

1.4.1. Phương pháp mô phỏng Monte Carlo

Phương pháp MCS đánh giá đáp ứng của kết cấu bằng cách biểu diễn một tập hợp lớn các hiện thực hóa từ trường ngẫu nhiên đầu vào. Ứng với mỗi mẫu θ_i , hệ phương cân bằng toàn kết cấu $[K(\theta)]\{u(\theta)\}=\{P\}$ được thiết lập và giải để tìm véc tơ chuyển vị. Thông qua xử lý thống kê tập dữ liệu đầu ra này, các đặc trưng ngẫu nhiên của kết cấu như giá trị trung bình, phương sai và COV được xác định. Mặc dù mang tính tổng quát và độ tin cậy cao, rào cản lớn nhất của kỹ thuật này là khối lượng tính toán khổng lồ khi hệ thống có số chiều lớn.

1.4.2. Phương pháp nhiễu loạn

Phương pháp nhiễu loạn ước lượng đáp ứng kết cấu bằng cách khai triển chuỗi Taylor các đại lượng của phương trình cân bằng tổng thể của toàn kết cấu xung quanh giá trị kỳ vọng và đồng nhất hóa các hệ số cùng bậc. Kỹ thuật này chuyển đổi hệ thống ngẫu nhiên thành các phương trình tất định giải tuần tự, cho phép tính toán trực tiếp kỳ vọng và ma trận hiệp phương sai của chuyển vị thông qua các chuỗi xấp xỉ.

1.4.3. Phương pháp tiếp cận phổ (SSFEM)

SSFEM kết hợp khai triển $K-L$ và đa thức nhiễu động, sử dụng phép chiếu Galerkin để chuyển đổi hệ thống ngẫu nhiên thành bài toán đại số tất định quy mô lớn. Phương pháp cho phép xác định trực tiếp hàm mật độ xác suất với tốc độ hội tụ cấp số nhân, vượt trội hoàn toàn so với các kỹ thuật mô phỏng lặp. Tuy nhiên, sự bùng nổ khối lượng tính toán khi số chiều hoặc bậc đa thức tăng cao vẫn là thách thức chính, đòi hỏi các thuật toán giải hệ thưa để tối ưu hóa hiệu năng.

1.5. Tổng quan về các nghiên cứu có liên quan đến nội dung của luận án

1.5.1. Tổng quan ứng dụng của SFEM trong các lĩnh vực khoa học

Phương pháp SFEM đã được ứng dụng rộng rãi nhằm định lượng tính bất định trong nhiều lĩnh vực: Trong khoa học vật liệu, phương pháp này giúp đánh giá ảnh hưởng của khiếm khuyết ngẫu nhiên đến độ tin cậy của vật liệu composite, vật liệu xốp và kim loại bọt [60, 90, 110]; Trong cơ sinh học, SFEM hỗ trợ định lượng sự phân tán tính chất xương, cột sống, vật liệu cấy ghép [74, 100, 38] và dự báo rủi ro vỡ động mạch chủ; Trong xây dựng và địa kỹ thuật, SFEM giải quyết các bài toán về độ lún nền đất [54], mô phỏng dòng chảy nước ngầm [130], xác định tải trọng tối hạn cho kết cấu thành móng [28, 122] và đánh giá tuổi thọ môi của hệ thống cầu thép [57].

1.5.2. Tình hình nghiên cứu ngoài nước

1.5.2.1. Tổng quan các nghiên cứu phân tích tĩnh ngẫu nhiên kết cấu dầm

Phân tích bất định tính chất vật liệu dầm đã chuyển dịch từ các giả thiết đơn giản sang mô hình trường ngẫu nhiên. Ban đầu, kỹ thuật trung bình cục bộ [121] bộc lộ hạn chế do phụ thuộc vào kích thước lưới phần tử. Hạn chế này được khắc phục bằng khái niệm tích phân trọng số [32, 35, 120], cho phép biểu diễn ma trận độ cứng và tải trọng tương đương qua các biến ngẫu nhiên tích phân. Cách tiếp cận này giúp lời giải đạt tính chặt chẽ toán học và hoàn toàn độc lập với việc chia lưới cũng như khoảng tương quan của trường ngẫu nhiên. Song song với phương pháp xấp xỉ, các lời giải giải tích chính xác cũng được phát triển mạnh mẽ nhằm tạo chuẩn kiểm chứng và loại bỏ sai số rời rạc hóa. Dựa trên nền tảng của bài toán tất định [44], các công thức dạng đóng cho ma trận độ cứng [16] và độ mềm ngẫu nhiên của dầm [40] đã được thiết lập. Đặc biệt, đối với vật liệu có hệ số biến thiên lớn (COV cao), phương pháp dựa trên nguyên lý biến phân [99] cho phép xác định trực tiếp hàm kỳ vọng và hiệp phương sai của chuyển vị với độ chính xác vượt trội so với phương pháp nhiễu loạn truyền thống. Hiện nay, trọng tâm nghiên cứu đang hướng tới bài toán không gian đa chiều và tích hợp thực nghiệm. Kỹ thuật trung bình cục bộ đã được mở rộng cho trường ngẫu nhiên 3D kết hợp khai triển Neumann và mô phỏng Monte Carlo (MCS) [25], song song với việc đánh giá tác động của biến thiên không gian đến độ tin cậy kết cấu [105]. Các hướng nghiên cứu hiện đại cũng chú trọng cập nhật mô hình thống kê qua thực nghiệm, nhận dạng hư hỏng [126, 127], và ứng dụng nguyên lý entropy cực đại kết hợp MCS để xác định chính xác phân bố xác suất của đáp ứng cơ học dưới tải trọng ngẫu nhiên [30].

1.5.2.2. Tổng quan các nghiên cứu phân tích dao động ngẫu nhiên của dầm, ổn định ngẫu nhiên của cột chịu nén đúng tâm

Trong lĩnh vực động lực học và ổn định ngẫu nhiên, phương pháp nhiễu loạn kết hợp SFEM đã được ứng dụng rộng rãi cho các cấu kiện phức tạp như dầm có tiết diện biến đổi hay dầm quay [26, 63]. Các hướng tiếp cận dựa trên ma trận độ cứng động và biến đổi Fourier đã cung cấp lời giải chính xác trong miền tần số [15, 58], trong khi việc tích hợp khai triển $K-L$ vào khung SSFEM kép [14, 91] tạo ra bước đột phá về hiệu suất tính toán. Đối với bài toán ổn định, các nghiên cứu nền tảng [18, 136] đã xác định tải trọng tới hạn của cột xét đến độ cứng bất định và khuyết tật hình học, sau đó được mở rộng cho cấu kiện có độ cong ngẫu nhiên [37, 69]. Đáng chú ý, việc áp dụng tích phân trọng số [116] đã giải quyết triệt để sự phụ thuộc vào lưới phần tử của các kỹ thuật rời rạc điểm truyền thống trong bài toán ổn định tĩnh.

Gần đây, xu hướng nghiên cứu đã mở rộng sang các hệ tương tác (dầm – nền đàn hồi, xe – cầu) và vật liệu tiên tiến (composite) [82, 117], bước đầu xét đến biến thiên không gian của tính chất vật liệu. Việc tích hợp phân tích

đẳng hình học (IGA) hay SFEM cho trường phi chuẩn (non-Gaussian) [45, 62, 103] đã cải thiện đáng kể độ chính xác so với mô hình FEM kinh điển. Song song đó, sự bùng nổ của trí tuệ nhân tạo (AI) và các kỹ thuật lấy mẫu tiên tiến (như Latin Hypercube) [66, 79, 134] đang mở ra hướng đi mới nhằm tối ưu hóa chi phí tính toán. Tuy nhiên, dù cho tốc độ dự báo cao, các mô hình lai (Hybrid AI) vẫn mang bản chất "hộp đen" hoặc chỉ dựa trên các phân tử đơn giản hóa. Hệ quả là các phương pháp này chưa thể hiện tường minh bản chất tương tác cơ học nội tại, đặc biệt khi bài toán đòi hỏi phải mô phỏng trường ngẫu nhiên không gian ba chiều (3D) đầy đủ.

1.5.2.3. Tổng quan các nghiên cứu phân tích ngẫu nhiên dầm phân lớp chức năng (FGM)

Dầm vật liệu biến đổi chức năng (FGM) nổi bật với các đặc tính cơ lý như mô đun đàn hồi và khối lượng riêng thay đổi liên tục theo chiều cao tiết diện, thường tuân theo quy luật hàm số mũ hoặc hàm số lũy thừa [73]. Mặc dù các nghiên cứu truyền thống đã thiết lập nền tảng vững chắc cho bài toán uốn, dao động và ổn định của dầm FGM [31, 94], đa số các mô hình này vẫn dựa trên quy luật phân bố xác định, chưa phản ánh được tính biến động ngẫu nhiên phát sinh trong quá trình chế tạo vật liệu.

Các nghiên cứu tiêu biểu của Noh [88] cùng nhóm tác giả N.V. Thuan và T.D. Hien [84, 85] đã tiên phong ứng dụng SFEM và kỹ thuật nhiễu loạn để phân tích dao động tự do của dầm FGM dưới tác động của trường ngẫu nhiên mô đun đàn hồi một chiều. Bên cạnh hướng tiếp cận xác suất, các nghiên cứu đã mở rộng sang lĩnh vực bất định mờ và các phương pháp bán giải tích nhằm xử lý các kích bản thiếu hụt dữ liệu thống kê [95, 137]. Việc so sánh giữa phân tích tất định và ngẫu nhiên trên các cấu kiện FGM phức tạp, như dầm cong có lỗ rỗng [17], cho thấy việc bỏ qua tính bất định có thể dẫn đến những đánh giá sai lệch về an toàn kết cấu. Điều này khẳng định tầm quan trọng của việc tích hợp yếu tố ngẫu nhiên vào quy trình thiết kế để đảm bảo độ tin cậy cho các hệ thống sử dụng vật liệu tiên tiến hiện nay.

1.5.3. Tình hình nghiên cứu trong nước

Tại Việt Nam, nghiên cứu kết cấu đang chuyển dịch mạnh mẽ từ mô hình tất định sang định hướng tiếp cận xác suất. Trong đó, mô phỏng Monte Carlo (MCS) giữ vai trò chủ đạo khi phân tích đáp ứng động phi tuyến, đánh giá an toàn công trình biển, nhà cao tầng và khảo sát lực tới hạn của cấu kiện có liên kết đàn hồi ngẫu nhiên [5, 6, 8, 13]. Để khắc phục khối lượng tính toán khổng lồ từ MCS, các hướng tiếp cận dựa trên phương pháp gần đúng [1] hoặc lý thuyết tập mờ [2] đã được ứng dụng linh hoạt nhằm mô hình hóa sự bất định của vật liệu và tải trọng. Bên cạnh đó, các nghiên cứu trong nước cũng đi sâu đánh giá độ nhạy của kết cấu mang khuyết tật (vết nứt, suy giảm độ cứng cục bộ, bất định thanh giằng) [3, 4, 9], đồng thời tích hợp trí tuệ nhân tạo để tối ưu hóa hệ giảm chấn khối lượng (TMD) dưới kích thích ngẫu nhiên [10, 11]. Riêng trong lĩnh vực giao thông, bài toán tương tác động lực học xe – cầu đã có những bước tiến quan trọng khi giải quyết được ảnh hưởng của độ mấp mô mặt đường và vận tốc bất định thông qua phương pháp tiến hóa mật độ xác suất [7, 12]. Tuy nhiên, một hạn chế bao trùm là các nghiên cứu trong nước hiện nay phần lớn vẫn phụ thuộc vào mô phỏng MCS tiêu tốn tài nguyên, đồng thời đặc tính ngẫu nhiên của vật liệu mới chỉ dừng lại ở giả thiết biến ngẫu nhiên hoặc trường ngẫu nhiên một chiều (1D). Việc phát triển một khung lý thuyết phân tử hữu hạn ngẫu nhiên (SFEM) toàn diện, trực tiếp giải quyết bài toán cơ học xét đến trường ngẫu nhiên không gian đa chiều (2D, 3D) vẫn là một khoảng trống học thuật lớn chưa được khai phá sâu rộng tại Việt Nam.

1.5.4. Đánh giá tổng quan và vấn đề nghiên cứu

Tổng quan tài liệu cho thấy các nỗ lực phát triển SFEM cho cấu kiện dầm và cột hiện đang tập trung vào ba trụ cột chính: (1) Phát triển lý thuyết tính toán thông qua việc tích hợp SFEM với lý thuyết biến dạng cắt bậc cao hoặc phân tích đẳng hình học; (2) Mở rộng phạm vi phân tích sang các hệ tương tác thực tế như nền đàn hồi ngẫu nhiên hay tương tác xe – cầu; và (3) Hoàn thiện mô hình biến thiên ngẫu nhiên không gian của đặc trưng vật liệu. Mặc dù hai trụ cột đầu tiên đã đạt được những tiến bộ, trụ cột thứ ba vẫn tồn tại một khoảng trống học thuật. Phần lớn các nghiên cứu hiện nay chỉ dừng lại ở giả thiết trường ngẫu nhiên một chiều (1D), chưa phản ánh đúng sự phân bố bất định phức tạp của vật liệu trong thực tế. Nhằm lấp đầy khoảng trống này, luận án phát triển một khung lý thuyết SFEM toàn diện, trực tiếp tích hợp trường ngẫu nhiên không gian đa chiều (2D, 3D). Đóng góp này không chỉ củng cố nền tảng lý thuyết của cơ học ngẫu nhiên mà còn mang đến một công cụ dự báo, đáp ứng các yêu cầu khắt khe về thiết kế tối ưu và an toàn kết cấu.

1.6. Kết luận chương I

Về phương pháp luận, luận án sử dụng trường ngẫu nhiên Gaussian dùng để mô phỏng tính ngẫu nhiên của tính chất vật liệu, kết hợp kỹ thuật tích phân trọng số và phương pháp nhiễu loạn nhằm giải quyết bài toán lan truyền bất định, với mô phỏng MCS làm chuẩn đối sánh. Hướng tiếp cận này trực tiếp lấp đầy khoảng trống của các nghiên cứu 1D hiện hành bằng cách tích hợp sự biến thiên ngẫu nhiên tính chất vật liệu trong không gian đa chiều, qua đó phản ánh chính xác hiệu ứng trung bình hóa không gian và bản chất không đồng nhất của tính chất vật liệu trong thực tế. Luận án tập trung phát triển khung lý thuyết SFEM dựa trên kỹ thuật tích phân trọng số để giải quyết trọn vẹn ba bài toán cơ bản của dầm và cột xét tới phân bố ngẫu nhiên đa chiều:

- ✓ (i) Phân tích tĩnh ngẫu nhiên: Xác định đặc trưng thống kê của biến dạng và chuyển vị.
- ✓ (ii) Phân tích đặc trưng động lực học tuyến tính ngẫu nhiên: Đánh giá sự phân tán của các giá trị riêng (tần số dao động tự do).
- ✓ (iii) Phân tích ổn định Euler ngẫu nhiên của cột chịu nén đúng tâm: Xác định đặc trưng thống kê của tải trọng tới hạn Euler cho cột chịu nén.

Cuối cùng, luận án thực hiện khảo sát tham số nhằm định lượng ảnh hưởng của chiều dài tương quan, COV và tương quan chéo giữa các trường vật liệu. Kết quả kỳ vọng sẽ làm sáng tỏ vai trò chi phối của tính ngẫu nhiên không gian đa chiều, cung cấp cơ sở khoa học vững chắc cho việc thiết kế và đánh giá độ tin cậy của các kết cấu hiện đại trong bối cảnh bất định.

CHƯƠNG II: PHÁT TRIỂN PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN NGẪU NHIÊN PHÂN TÍCH TÍNH VÀ ĐẶC TRƯNG ĐỘNG LỰC HỌC TUYẾN TÍNH CỦA DẦM PHẪNG CHỊU UỐN CÓ TÍNH CHẤT VẬT LIỆU NGẪU NHIÊN KHÔNG GIAN

2.1. Mô hình bài toán

Xét dầm Euler-Bernoulli thẳng có chiều dài nhịp L , mặt cắt ngang hình chữ nhật có chiều rộng là b và chiều cao dầm là h , có mô đun đàn hồi E và mật độ khối lượng ρ . Trong trường hợp $E = E_0$ và $\rho = \rho_0$ là tất định, phương trình vi phân chuyển động tổng quát như (2.1):

$$E_0 I \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + \rho_0 A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = q(x,t) \quad (2.1)$$

Do quá trình chế tạo vật liệu, cấu trúc vi mô của vật liệu, hoặc quá trình lão hóa các tính chất vật liệu ngẫu nhiên không gian. Mô đun đàn hồi E và mật độ khối lượng ρ của dầm được giả định là trường ngẫu nhiên hai chiều như (2.2) và (2.3), ngẫu nhiên ba chiều như (2.4) và (2.5):

$$E(\mathbf{x}, \theta) = E(x, y, \theta) = E_0 [1 + f(x, y, \theta)]; \quad f(x, y, \theta) > -1 \quad (2.2)$$

$$\rho(\mathbf{x}, \theta) = \rho(x, y, \theta) = \rho_0 [1 + g(x, y, \theta)]; \quad g(x, y, \theta) > -1 \quad (2.3)$$

$$E(\mathbf{x}, \theta) = E(x, y, z, \theta) = E_0 [1 + f(x, y, z, \theta)]; \quad f(x, y, z, \theta) > -1 \quad (2.4)$$

$$\rho(\mathbf{x}, \theta) = \rho(x, y, z, \theta) = \rho_0 [1 + g(x, y, z, \theta)]; \quad g(x, y, z, \theta) > -1 \quad (2.5)$$

Phương trình vi phân chuyển động của dầm trong trường hợp mô đun đàn hồi và mật độ khối lượng ngẫu nhiên không gian có dạng:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\mathcal{D}(x, \theta) \frac{\partial^2 w(x, t, \theta)}{\partial x^2} \right] + \mathcal{M}(x, \theta) \frac{\partial^2 w(x, t, \theta)}{\partial t^2} = q(x, t) \quad (2.6)$$

Với $\mathcal{D}(x, \theta)$ là độ cứng uốn hiệu dụng được xác định: $\mathcal{D}(x, \theta) = \int_A y^2 E(\mathbf{x}, \theta) dydz$, $\mathcal{M}(x, \theta)$ khối lượng hiệu dụng trên một đơn vị chiều dài được xác định: $\mathcal{M}(x, \theta) = \int_A \rho(\mathbf{x}, \theta) dydz$. Việc tìm lời giải giải tích chính xác cho các phương trình vi phân (2.6) gặp phải những thách thức toán học do các hệ số của phương trình là những trường ngẫu nhiên không gian có số bậc tự do vô hạn.

2.2. Phát triển phương pháp phần tử hữu hạn ngẫu nhiên bằng kỹ thuật tích phân trọng số biểu diễn trường ngẫu nhiên không gian của tính chất vật liệu

2.2.1. Biểu diễn trường mô đun đàn hồi ngẫu nhiên hai chiều

Theo FEM, kết cấu dầm được chia thành N_e phần tử. Khi đó mô đun đàn hồi của phần tử thứ e được biểu diễn như (2.7):

$$E_e(x, y) = E_0 [1 + f_e(x, y)]; \quad f_e(x, y) > -1 \quad (2.7)$$

Trong nghiên cứu này sử dụng phần tử dầm có hai nút tại hai đầu của phần tử, mỗi nút có hai bậc tự do. $[K]_e$ được xác định $[K]_e = \int_{V_e} [B]^T [D] [B] dV_e$:

$$[K]_e = [\Lambda]^T \underbrace{\left\{ \int_{V_e} y^2 E_0 [r'']^T [r''] dV_e \right\}}_{[K_0]_e} [\Lambda] + [\Lambda]^T \underbrace{\left\{ \int_{V_e} y^2 f_e(x, y) E_0 [r'']^T [r''] dV_e \right\}}_{[\Delta K]_e} [\Lambda] \quad (2.8)$$

Dựa vào (2.8) thấy rằng $[K]_e$ được phân tách thành hai thành phần: phần tất định $[K_0]_e$ xác định như (2.9) và phần ngẫu nhiên $[\Delta K]_e$ được xác định như (2.10), với các biến ngẫu nhiên (2.11).

$$[K_0]_e = [\Lambda]^T \left\{ \int_{V_e} y^2 E_0 [r'']^T [r''] dV_e \right\} [\Lambda] = \frac{E_0 I}{L_e^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L_e & -12 & 6L_e \\ & 4L_e^2 & -6L_e & 2L_e^2 \\ & & 12 & -6L_e \\ \text{sym.} & & & 4L_e^2 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

$$[\Delta K]_e = [\Lambda]^T \left\{ \int_{V_e} y^2 f_e(x, y) E_0 [r'']^T [r''] dV_e \right\} [\Lambda] = [\Delta K_1]_e \Theta_1^e + [\Delta K_2]_e \Theta_2^e + [\Delta K_3]_e \Theta_3^e \quad (2.10)$$

$$\Theta_i^e = \int_{A_e} x^{i-1} y^2 f_e(x, y) dA_e; i = 1, 2, 3 \quad (2.11)$$

$$[\Delta K_1]_e = \frac{E_0 b}{L_e^6} \begin{bmatrix} 36L_e^2 & 24L_e^3 & -36L_e^2 & 12L_e^3 \\ & 16L_e^4 & -24L_e^3 & 8L_e^4 \\ & & 36L_e^2 & -12L_e^3 \\ \text{sym.} & & & 4L_e^4 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

$$[\Delta K_2]_e = \frac{E_0 b}{L_e^6} \begin{bmatrix} -144L_e & -84L_e^2 & 144L_e & -60L_e^2 \\ & -48L_e^3 & 84L_e^2 & -36L_e^3 \\ & & -144L_e & 60L_e^2 \\ \text{sym.} & & & -24L_e^3 \end{bmatrix}; [\Delta K_3]_e = \frac{E_0 b}{L_e^6} \begin{bmatrix} 144 & 72L_e & -144 & 72L_e \\ & 36L_e^2 & -72L_e & 36L_e^2 \\ & & 144 & -72L_e \\ \text{sym.} & & & 36L_e^2 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

2.2.2. Biểu diễn trường mật độ khối lượng ngẫu nhiên hai chiều

Theo FEM ma trận khối lượng của phần tử được xác định như phương trình (2.14):

$$[M]_e = \int_{V_e} \rho [N]^T [N] dV_e \quad (2.14)$$

Kết cấu dầm được chia thành N_e phần tử, mật độ khối lượng ngẫu nhiên hai chiều như (2.15) với ρ_0 là giá trị kỳ vọng của ρ , $g(x,y)$ là trường ngẫu nhiên Gaussian dừng, hai chiều, có giá trị kỳ vọng bằng không.

$$\rho(x,y) = \rho_0 [1 + g_e(x,y)]; \quad g_e(x,y) > -1 \quad (2.15)$$

Ma trận khối lượng của phần tử được xác định bao gồm: phần tất định và phần ngẫu nhiên:

$$[M]_e = [\Lambda]^T \underbrace{\int_{V_e} \rho_0 [r]^T [r] dV_e [\Lambda]}_{[M_0]_e} + \underbrace{[\Lambda]^T \int_{V_e} \rho_0 g_e(x,y) [r]^T [r] dV_e [\Lambda]}_{\sum_{i=1}^7 [\Delta M_i]_e \Psi_i^e} = [M_0]_e + \sum_{i=1}^7 [\Delta M_i]_e \Psi_i^e \quad (2.16)$$

$$[M_0]_e = \rho_0 A_e \begin{bmatrix} \frac{13}{35} L_e & \frac{11}{210} L_e^2 & \frac{9}{70} L_e & -\frac{13}{420} L_e^2 \\ & \frac{1}{105} L_e^3 & \frac{13}{420} L_e^2 & -\frac{1}{420} L_e^3 \\ & & \frac{13}{35} L_e & -\frac{11}{210} L_e^2 \\ \text{sym.} & & & \frac{1}{105} L_e^2 \end{bmatrix} \quad (2.17); \quad [\Delta M_1]_e = b\rho_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \\ \text{sym.} & & & 0 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

$$[\Delta M_2]_e = b\rho_0 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \\ \text{sym.} & & & 0 \end{bmatrix} \quad (2.19); \quad [\Delta M_3]_e = \frac{b\rho_0}{L_e^2} \begin{bmatrix} -6 & -2L_e & 3 & -L_e \\ & L_e^2 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \\ \text{sym.} & & & 0 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

$$[\Delta M_4]_e = \frac{b\rho_0}{L_e^3} \begin{bmatrix} 4 & -2L_e & -2 & L_e \\ & -4L_e^2 & 3L_e & -L_e^2 \\ & & 0 & 0 \\ \text{sym.} & & & 0 \end{bmatrix} \quad (2.21); \quad [\Delta M_5]_e = \frac{b\rho_0}{L_e^4} \begin{bmatrix} 9 & 8L_e & -9 & 3L_e \\ & 6L_e^2 & -8L_e & 3L_e^2 \\ & & 9 & -3L_e \\ \text{sym.} & & & L_e^2 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

$$[\Delta M_6]_e = \frac{b\rho_0}{L_e^5} \begin{bmatrix} -12 & -7L_e & 12 & -5L_e \\ & -4L_e^2 & 7L_e & -3L_e^2 \\ & & -12 & 5L_e \\ \text{sym.} & & & -2L_e^2 \end{bmatrix} \quad (2.23); \quad [\Delta M_7]_e = \frac{b\rho_0}{L_e^6} \begin{bmatrix} 4 & 2L_e & -4 & 2L_e \\ & L_e^2 & -2L_e & L_e^2 \\ & & 4 & -2L_e \\ \text{sym.} & & & L_e^2 \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

Các biến ngẫu nhiên Ψ_i^e được xác định như (2.25) thông qua tích phân trọng số của trường ngẫu nhiên hai chiều mật độ khối lượng và các đơn thức. $\Psi_i^e = \int_{A_e} x^{i-1} g_e(x,y) dx dy \quad ; \quad i = 1, 2, 3, \dots, 7$ (2.25)

2.2.3. Biểu diễn trường mô đun đàn hồi ngẫu nhiên ba chiều

Mô đun đàn hồi dầm ngẫu nhiên ba chiều như (2.4) với E_0 là giá trị kỳ vọng, $f(x,y,z)$ là trường ngẫu nhiên dừng, ba chiều có kỳ vọng bằng không. Mô đun đàn hồi của phần tử thứ e biểu diễn như (2.26).

$$E_e(x,y,z) = E_0 [1 + f_e(x,y,z)]; \quad f_e(x,y,z) > -1 \quad (2.26)$$

$[K]_e$ có mô đun đàn hồi thay đổi ngẫu nhiên ba chiều được xác định như (2.27) với các biến ngẫu nhiên cơ bản được xác định như (2.28) và các ma trận được xác định như (2.29) - (2.31).

$$[K]_e = [K_0]_e + [\Delta K_1]_e \Theta_1^e + [\Delta K_2]_e \Theta_2^e + [\Delta K_3]_e \Theta_3^e \quad (2.27)$$

$$\Theta_i^e = \int_{V_e} x^{i-1} y^2 f_e(x, y, z) dV_e; \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.28); \quad [\Delta K_1]_e = \frac{E_0}{L_e^6} \begin{bmatrix} 36L_e^2 & 24L_e^3 & -36L_e^2 & 12L_e^3 \\ & 16L_e^4 & -24L_e^3 & 8L_e^4 \\ & & 36L_e^2 & -12L_e^3 \\ \text{sym.} & & & 4L_e^4 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

$$[\Delta K_2]_e = \frac{E_0}{L_e^6} \begin{bmatrix} -144L_e & -84L_e^2 & 144L_e & -60L_e^2 \\ & -48L_e^3 & 84L_e^2 & -36L_e^3 \\ & & -144L_e & 60L_e^2 \\ \text{sym.} & & & -24L_e^3 \end{bmatrix} \quad (2.30); \quad [\Delta K_3]_e = \frac{E_0}{L_e^6} \begin{bmatrix} 144 & 72L_e & -144 & 72L_e \\ & 36L_e^2 & -72L_e & 36L_e^2 \\ & & 144 & -72L_e \\ \text{sym.} & & & 36L_e^2 \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

2.2.4. Biểu diễn trường mật độ khối lượng ngẫu nhiên ba chiều

Mật độ khối lượng của dầm thay đổi ngẫu nhiên ba chiều như các phương trình (2.32) với $g(x, y, z)$ là trường ngẫu nhiên ba chiều, dùng có giá trị kỳ vọng bằng không.

$$\rho(x, y, z) = \rho_0 [1 + g(x, y, z)]; \quad g(x, y, z) > -1 \quad (2.32)$$

Ma trận khối lượng của phần tử có mật độ khối lượng ngẫu nhiên ba chiều được xác định như phương trình (2.33) với các ma trận hệ số được xác định như các phương trình (2.34) - (2.40) và biến ngẫu nhiên được xác định như phương trình (2.41).

$$[M]_e = [M_0]_e + \sum_{i=1}^7 [\Delta M_i]_e \Psi_i^e \quad (2.33); \quad [\Delta M_1]_e = \rho_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \\ \text{sym.} & & & 0 \end{bmatrix} \quad (2.34); \quad [\Delta M_2]_e = \rho_0 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \\ \text{sym.} & & & 0 \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

$$[\Delta M_3]_e = \frac{\rho_0}{L_e^2} \begin{bmatrix} -6 & -2L_e & 3 & -L_e \\ & L_e^2 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \\ \text{sym.} & & & 0 \end{bmatrix} \quad (2.36); \quad [\Delta M_4]_e = \frac{\rho_0}{L_e^3} \begin{bmatrix} 4 & -2L_e & -2 & L_e \\ & -4L_e^2 & 3L_e & -L_e^2 \\ & & 0 & 0 \\ \text{sym.} & & & 0 \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

$$[\Delta M_5]_e = \frac{\rho_0}{L_e^4} \begin{bmatrix} 9 & 8L_e & -9 & 3L_e \\ & 6L_e^2 & -8L_e & 3L_e^2 \\ & & 9 & -3L_e \\ \text{sym.} & & & L_e^2 \end{bmatrix} \quad (2.38); \quad [\Delta M_6]_e = \frac{\rho_0}{L_e^5} \begin{bmatrix} -12 & -7L_e & 12 & -5L_e \\ & -4L_e^2 & 7L_e & -3L_e^2 \\ & & -12 & 5L_e \\ \text{sym.} & & & -2L_e^2 \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

$$[\Delta M_7]_e = \frac{\rho_0}{L_e^6} \begin{bmatrix} 4 & 2L_e & -4 & 2L_e \\ & L_e^2 & -2L_e & L_e^2 \\ & & 4 & -2L_e \\ \text{sym.} & & & L_e^2 \end{bmatrix} \quad (2.40); \quad \Psi_i^e = \int_{V_e} x^{i-1} g_e(x, y, z) dx dy dz \quad ; \quad i = 1, 2, 3, \dots, 7 \quad (2.41)$$

2.3. Phát triển phương pháp phần tử hữu hạn ngẫu nhiên cho bài toán tĩnh

Phương trình cân bằng của toàn kết cấu khi phân tích tĩnh như (2.42):

$$[K]\{U\} = \{P\} \quad (2.42)$$

Ma trận độ cứng tổng thể được phân tách thành phần tất định $[K_0] = \sum_{e=1}^{N_e} [K_0]_e^{Ext}$ và phần ngẫu nhiên phụ thuộc vào các biến ngẫu nhiên cơ bản như (2.43).

$$[K] = [K_0] + \sum_{e=1}^{N_e} ([\Delta K_1]_e^{Ext} \Theta_1^e + [\Delta K_2]_e^{Ext} \Theta_2^e + [\Delta K_3]_e^{Ext} \Theta_3^e) \quad (2.43)$$

Thực hiện triển khai các đại lượng tham gia trong (2.42) dưới dạng chuỗi Taylor xung quanh giá trị kỳ vọng $\bar{\Theta}_i^e$ của các biến ngẫu nhiên $\{\Theta\} = \{\Theta_i^e\}_{i=1,2,3}^{e=1,2,\dots,N_e}$ thu được (2.44) - (2.45).

$$[K] \approx [K_0] + \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^3 [K_i^e]_I (\Theta_i^e - \bar{\Theta}_i^e) + \frac{1}{2} \sum_{e_1=1}^{N_e} \sum_{e_2=1}^{N_e} \sum_{i_1=1}^3 \sum_{i_2=1}^3 [K_{i_1 i_2}^{e_1 e_2}]_{II} (\Theta_{i_1}^{e_1} - \bar{\Theta}_{i_1}^{e_1}) (\Theta_{i_2}^{e_2} - \bar{\Theta}_{i_2}^{e_2}) + \dots \quad (2.44)$$

$$\{U\} \approx \{U_0\} + \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^3 \{U_i^e\}_I (\Theta_i^e - \bar{\Theta}_i^e) + \frac{1}{2} \sum_{e_1=1}^{N_e} \sum_{e_2=1}^{N_e} \sum_{i_1=1}^3 \sum_{i_2=1}^3 \{U_{i_1 i_2}^{e_1 e_2}\}_{II} (\Theta_{i_1}^{e_1} - \bar{\Theta}_{i_1}^{e_1}) (\Theta_{i_2}^{e_2} - \bar{\Theta}_{i_2}^{e_2}) + \dots \quad (2.45)$$

Các ma trận xuất hiện trong (2.44) - (2.45) được xác định như (2.46).

$$[K_i^e]_I = \frac{\partial [K]}{\partial \Theta_i^e} \Big|_{\bar{\Theta}_i^e}; \quad [K_{i_1 i_2}^{e_1 e_2}]_{II} = \frac{\partial^2 [K]}{\partial \Theta_{i_1}^{e_1} \partial \Theta_{i_2}^{e_2}} \Big|_{\bar{\Theta}_i^e}; \quad \{U_i^e\}_I = \frac{\partial \{U\}}{\partial \Theta_i^e} \Big|_{\bar{\Theta}_i^e}; \quad \{U_{i_1 i_2}^{e_1 e_2}\}_{II} = \frac{\partial^2 \{U\}}{\partial \Theta_{i_1}^{e_1} \partial \Theta_{i_2}^{e_2}} \Big|_{\bar{\Theta}_i^e} \quad (2.46)$$

Trong (2.46) các ký hiệu $[\bullet]_I, [\bullet]_{II}$ là đạo hàm riêng bậc I, II theo các biến ngẫu nhiên cơ bản tại giá trị kỳ vọng của các biến ngẫu nhiên. Các biến ngẫu nhiên Θ_i^e được rời rạc hóa từ cùng một trường ngẫu nhiên $f(x,y)$ hoặc $f(x,y,z)$ có kỳ vọng bằng không nên các biến ngẫu nhiên có $\bar{\Theta}_i^e = 0$. Thay vào (2.44) - (2.45) thu được các phương trình:

$$[K] \approx [K_0] + \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^3 [K_i^e]_I \Theta_i^e + \frac{1}{2} \sum_{e_1=1}^{N_e} \sum_{e_2=1}^{N_e} \sum_{i_1=1}^3 \sum_{i_2=1}^3 [K_{i_1 i_2}^{e_1 e_2}]_{II} \Theta_{i_1}^{e_1} \Theta_{i_2}^{e_2} + \dots \quad (2.47)$$

$$\{U\} \approx \{U_0\} + \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^3 \{U_i^e\}_I \Theta_i^e + \frac{1}{2} \sum_{e_1=1}^{N_e} \sum_{e_2=1}^{N_e} \sum_{i_1=1}^3 \sum_{i_2=1}^3 \{U_{i_1 i_2}^{e_1 e_2}\}_{II} \Theta_{i_1}^{e_1} \Theta_{i_2}^{e_2} + \dots \quad (2.48)$$

Thay (2.47) - (2.48) vào (2.42) thực hiện đồng nhất các hệ số cùng bậc đạo hàm riêng thu được các đạo hàm riêng của véc tơ chuyển vị, từ đó xấp xỉ bậc nhất của véc tơ $\{U\}$ của toàn kết cấu như (2.49).

$$\{U\} \approx \{U_0\} - \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^3 [K_0]^{-1} [K_i^e]_I \{U_0\} \Theta_i^e \quad (2.49)$$

Thực hiện các phép toán xác định kỳ vọng và phương sai thu được giá trị kỳ vọng và ma trận hiệp phương sai của chuyển vị nút được xác định (2.50) - (2.51).

$$\mathbb{E}[\{U\}] \approx \mathbb{E} \left[\{U_0\} - \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^3 [K_0]^{-1} [K_i^e]_I \{U_0\} \Theta_i^e \right] \approx \{U_0\} \quad (2.50)$$

$$Cov[\{U\}, \{U\}^T] = \sum_{e_1=1}^{N_e} \sum_{e_2=1}^{N_e} \sum_{i_1=1}^3 \sum_{i_2=1}^3 \left\{ [K_0]^{-1} [K_{i_1}^{e_1}]_I \{U_0\} \{U_0\}^T \left([K_{i_2}^{e_2}]_I \right)^T \left([K_0]^{-1} \right)^T \right\} \mathbb{E}[\Theta_{i_1}^{e_1} \Theta_{i_2}^{e_2}] \quad (2.51)$$

Phương sai của chuyển vị nút khi có mô đun đàn hồi ngẫu nhiên (2D, 3D) được xác định lần lượt:

$$Var[\{U\}, \{U\}^T] = \sum_{e_1=1}^{N_e} \sum_{e_2=1}^{N_e} \sum_{i_1=1}^3 \sum_{i_2=1}^3 \left\{ diag \left([K_0]^{-1} [\Delta K_{i_1}^{e_1}]_e^{Ext} \{U_0\} \{U_0\}^T \left([\Delta K_{i_2}^{e_2}]_e^{Ext} \right)^T \left([K_0]^{-1} \right)^T \right) \right. \\ \left. \int_{A_{e_1}} \int_{A_{e_2}} x_1^{i_1-1} y_1^{i_1-1} x_2^{i_2-1} y_2^{i_2-1} R_{f_{e_1} f_{e_2}} dA_{e_1} dA_{e_2} \right\} \quad (2.52)$$

$$Var[\{U\}, \{U\}^T] = \sum_{e_1=1}^{N_e} \sum_{e_2=1}^{N_e} \sum_{i_1=1}^3 \sum_{i_2=1}^3 \left\{ diag \left([K_0]^{-1} [\Delta K_{i_1}^{e_1}]_e^{Ext} \{U_0\} \{U_0\}^T \left([\Delta K_{i_2}^{e_2}]_e^{Ext} \right)^T \left([K_0]^{-1} \right)^T \right) \right. \\ \left. \int_{V_{e_1}} \int_{V_{e_2}} x_1^{i_1-1} y_1^{i_1-1} x_2^{i_2-1} y_2^{i_2-1} R_{f_{e_1} f_{e_2}} dV_{e_1} dV_{e_2} \right\} \quad (2.53)$$

$$COV \text{ của chuyển vị nút tại giữa nhịp được xác định: } COV = \frac{\sqrt{Var[\{U\}, \{U\}^T]_{\frac{L}{2}}}}{\left| \mathbb{E}[\{U\}]_{\frac{L}{2}} \right|} \quad (2.54)$$

2.4. Phát triển phương pháp phần tử hữu hạn ngẫu nhiên cho bài toán phân tích đặc trưng động lực học tuyến tính

2.4.1. Phân tích dao động uốn tự do của dầm bằng phương pháp phần tử hữu hạn

Xét kết cấu dầm mặt cắt ngang chữ nhật có chiều cao h , bề rộng b và chiều dài nhịp là L . Phương trình dao động tự do không cản của dầm:

$$([K] - \omega^2 [M]) \{\Phi\} = 0 \quad (2.55)$$

Tần số góc của dao động riêng được xác định như phương trình (2.56):

$$Det([K] - \omega^2 [M]) = 0 \quad (2.56)$$

2.4.2. Phát triển phương pháp phần tử hữu hạn ngẫu nhiên phân tích đặc trưng động lực học tuyến tính của dầm có tính chất vật liệu ngẫu nhiên không gian

Ma trận độ cứng, trận khối lượng của kết cấu dầm trong trường hợp mật độ khối lượng ngẫu nhiên trong không gian 2D và 3D.

$$[K] = \sum_{e=1}^{N_e} [K]_e = \sum_{e=1}^{N_e} [K_0]_e^{Ext} + \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^3 [\Delta K_i]_e^{Ext} \Theta_i^e = [K_0] + \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^3 [\Delta K_i]_e^{Ext} \Theta_i^e \quad (2.57)$$

$$[M] = \sum_{e=1}^{N_e} [M]_e = \sum_{e=1}^{N_e} [M_0]_e^{Ext} + \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^7 [\Delta M_i]_e^{Ext} \Psi_i^e = [M_0] + \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^7 [\Delta M_i]_e^{Ext} \Psi_i^e \quad (2.58)$$

Đối với giá trị riêng thứ k và dạng dao động riêng thứ k thì:

$$\left[\underbrace{\left([K_0] + \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^3 [\Delta K_i]_e^{Ext} \Theta_i^e \right)}_{[K]} - \lambda_k \left([M_0] + \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^7 [\Delta M_i]_e^{Ext} \Psi_i^e \right) \right] \{\Phi\}_k = 0 \quad (2.59)$$

Triển khai chuỗi Taylor của ma trận độ cứng, ma trận khối lượng, giá trị riêng và dạng dao động riêng thứ k ta có:

$$[K] \approx [K_0] + \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^3 \left[\frac{\partial [K]}{\partial \Theta_i^e} \right]_{\bar{\Theta}_i^e} \left(\Theta_i^e - \bar{\Theta}_i^e \right) + \frac{1}{2} \sum_{e_1=1}^{N_e} \sum_{e_2=1}^{N_e} \sum_{i_1=1}^3 \sum_{i_2=1}^3 \left[\frac{\partial^2 [K]}{\partial \Theta_{i_1}^{e_1} \partial \Theta_{i_2}^{e_2}} \right]_{\bar{\Theta}_i^e} \left(\Theta_{i_1}^{e_1} - \bar{\Theta}_{i_1}^{e_1} \right) \left(\Theta_{i_2}^{e_2} - \bar{\Theta}_{i_2}^{e_2} \right) + \dots \quad (2.60)$$

$$[M] \approx [M_0] + \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^7 \left[\frac{\partial [M]}{\partial \Psi_i^e} \right]_{\bar{\Psi}_i^e} \left(\Psi_i^e - \bar{\Psi}_i^e \right) + \frac{1}{2} \sum_{e_1=1}^{N_e} \sum_{e_2=1}^{N_e} \sum_{i_1=1}^7 \sum_{i_2=1}^7 \left[\frac{\partial^2 M}{\partial \Psi_{i_1}^{e_1} \partial \Psi_{i_2}^{e_2}} \right]_{\bar{\Psi}_i^e} \left(\Psi_{i_1}^{e_1} - \bar{\Psi}_{i_1}^{e_1} \right) \left(\Psi_{i_2}^{e_2} - \bar{\Psi}_{i_2}^{e_2} \right) + \dots \quad (2.61)$$

$$\lambda_k \approx \lambda_k^0 + \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^3 \left[\frac{\partial \lambda_k}{\partial \Theta_i^e} \right]_{\bar{\Theta}_i^e} \left(\Theta_i^e - \bar{\Theta}_i^e \right) + \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^7 \left[\frac{\partial \lambda_k}{\partial \Psi_i^e} \right]_{\bar{\Psi}_i^e} \left(\Psi_i^e - \bar{\Psi}_i^e \right) + \frac{1}{2} \sum_{e_1=1}^{N_e} \sum_{e_2=1}^{N_e} \sum_{i_1=1}^3 \sum_{i_2=1}^3 \left[\frac{\partial^2 \lambda_k}{\partial \Theta_{i_1}^{e_1} \partial \Theta_{i_2}^{e_2}} \right]_{\bar{\Theta}_i^e} \left(\Theta_{i_1}^{e_1} - \bar{\Theta}_{i_1}^{e_1} \right) \left(\Theta_{i_2}^{e_2} - \bar{\Theta}_{i_2}^{e_2} \right) \quad (2.62)$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{e_1=1}^{N_e} \sum_{e_2=1}^{N_e} \sum_{i_1=1}^7 \sum_{i_2=1}^7 \left[\frac{\partial^2 \lambda_k}{\partial \Psi_{i_1}^{e_1} \partial \Psi_{i_2}^{e_2}} \right]_{\bar{\Psi}_i^e} \left(\Psi_{i_1}^{e_1} - \bar{\Psi}_{i_1}^{e_1} \right) \left(\Psi_{i_2}^{e_2} - \bar{\Psi}_{i_2}^{e_2} \right) + \frac{1}{2} \sum_{e_1=1}^{N_e} \sum_{e_2=1}^{N_e} \sum_{i_1=1}^3 \sum_{i_2=1}^7 \left[\frac{\partial^2 \lambda_k}{\partial \Theta_{i_1}^{e_1} \partial \Psi_{i_2}^{e_2}} \right]_{\bar{\Theta}_i^e, \bar{\Psi}_i^e} \left(\Theta_{i_1}^{e_1} - \bar{\Theta}_{i_1}^{e_1} \right) \left(\Psi_{i_2}^{e_2} - \bar{\Psi}_{i_2}^{e_2} \right) + \dots$$

$$\begin{aligned} \{\Phi\}_k &\approx \{\Phi\}_k^0 + \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^3 \left[\frac{\partial \{\Phi\}_k}{\partial \Theta_i^e} \right]_{\bar{\Theta}_i^e} \left(\Theta_i^e - \bar{\Theta}_i^e \right) + \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^7 \left[\frac{\partial \{\Phi\}_k}{\partial \Psi_i^e} \right]_{\bar{\Psi}_i^e} \left(\Psi_i^e - \bar{\Psi}_i^e \right) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{e_1=1}^{N_e} \sum_{e_2=1}^{N_e} \sum_{i_1=1}^3 \sum_{i_2=1}^3 \left[\frac{\partial^2 \{\Phi\}_k}{\partial \Theta_{i_1}^{e_1} \partial \Theta_{i_2}^{e_2}} \right]_{\bar{\Theta}_i^e} \left(\Theta_{i_1}^{e_1} - \bar{\Theta}_{i_1}^{e_1} \right) \left(\Theta_{i_2}^{e_2} - \bar{\Theta}_{i_2}^{e_2} \right) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{e_1=1}^{N_e} \sum_{e_2=1}^{N_e} \sum_{i_1=1}^7 \sum_{i_2=1}^7 \left[\frac{\partial^2 \{\Phi\}_k}{\partial \Psi_{i_1}^{e_1} \partial \Psi_{i_2}^{e_2}} \right]_{\bar{\Psi}_i^e} \left(\Psi_{i_1}^{e_1} - \bar{\Psi}_{i_1}^{e_1} \right) \left(\Psi_{i_2}^{e_2} - \bar{\Psi}_{i_2}^{e_2} \right) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{e_1=1}^{N_e} \sum_{e_2=1}^{N_e} \sum_{i_1=1}^3 \sum_{i_2=1}^7 \left[\frac{\partial^2 \{\Phi\}_k}{\partial \Theta_{i_1}^{e_1} \partial \Psi_{i_2}^{e_2}} \right]_{\bar{\Theta}_i^e, \bar{\Psi}_i^e} \left(\Theta_{i_1}^{e_1} - \bar{\Theta}_{i_1}^{e_1} \right) \left(\Psi_{i_2}^{e_2} - \bar{\Psi}_{i_2}^{e_2} \right) + \dots \end{aligned} \quad (2.63)$$

Xấp xỉ bậc nhất của giá trị riêng như phương trình sau:

$$\lambda_k \approx \lambda_k^0 + \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^3 \{\Phi_k^0\}^T [\Delta K_i]_e^{Ext} \{\Phi_k^0\} \Theta_i^e + \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^7 \left(-\{\Phi_k^0\}^T \lambda_k^0 [\Delta M_i]_e^{Ext} \{\Phi_k^0\} \right) \Psi_i^e \quad (2.64)$$

Kỳ vọng của giá trị riêng thứ k được xác định như phương trình:

$$\mathbb{E}[\lambda_k] \approx \mathbb{E} \left[\lambda_k^0 + \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^3 \{\Phi_k^0\}^T [\Delta K_i]_e^{Ext} \{\Phi_k^0\} \Theta_i^e + \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^7 \left(-\{\Phi_k^0\}^T \lambda_k^0 [\Delta M_i]_e^{Ext} \{\Phi_k^0\} \right) \Psi_i^e \right] \approx \lambda_k^0 \quad (2.65)$$

Phương sai của giá trị riêng ở dạng dao động thứ k trong trường hợp tính chất vật liệu ngẫu nhiên hai chiều:

$$\begin{aligned} Var[\lambda_k] &= \mathbb{E} \left[\left(\lambda_k - \mathbb{E}[\lambda_k] \right) \left(\lambda_k - \mathbb{E}[\lambda_k] \right) \right] \\ &= \sum_{e_1=1}^{N_e} \sum_{e_2=1}^{N_e} \sum_{i_1=1}^3 \sum_{i_2=1}^3 \left\{ \{\Phi_k^0\}^T [\Delta K_{i_1}]_e^{Ext} \{\Phi_k^0\} \{\Phi_k^0\}^T [\Delta K_{i_2}]_e^{Ext} \{\Phi_k^0\} \int_{A_{e_1}} \int_{A_{e_2}} x_1^{i_1-1} y_1^2 x_2^{i_2-1} y_2^2 R_{ff} dA_{e_1} dA_{e_2} \right\} \\ &+ \sum_{e_1=1}^{N_e} \sum_{e_2=1}^{N_e} \sum_{i_1=1}^7 \sum_{i_2=1}^7 \left\{ \{\Phi_k^0\}^T \lambda_k^0 [\Delta M_{i_1}]_e^{Ext} \{\Phi_k^0\} \{\Phi_k^0\}^T \lambda_k^0 [\Delta M_{i_2}]_e^{Ext} \{\Phi_k^0\} \int_{A_{e_1}} \int_{A_{e_2}} x_1^{i_1-1} x_2^{i_2-1} R_{gg} dA_{e_1} dA_{e_2} \right\} \\ &+ 2 \sum_{e_1=1}^{N_e} \sum_{e_2=1}^{N_e} \sum_{i_1=1}^3 \sum_{i_2=1}^7 \left\{ \{\Phi_k^0\}^T [\Delta K_{i_1}]_e^{Ext} \{\Phi_k^0\} \{\Phi_k^0\}^T \{\Phi_k^0\}^T (-\lambda_k^0) [\Delta M_{i_2}]_e^{Ext} \{\Phi_k^0\} \int_{A_{e_1}} \int_{A_{e_2}} x_1^{i_1-1} y_1^2 x_2^{i_2-1} R_{fg} dA_{e_1} dA_{e_2} \right\} \end{aligned} \quad (2.66)$$

Trong trường hợp E và ρ ngẫu nhiên ba chiều phương sai của giá trị riêng ở dạng dao động thứ k :

$$\begin{aligned} Var[\lambda_k] &= \mathbb{E} \left[\left(\lambda_k - \mathbb{E}[\lambda_k] \right) \left(\lambda_k - \mathbb{E}[\lambda_k] \right) \right] \\ &= \sum_{e_1=1}^{N_e} \sum_{e_2=1}^{N_e} \sum_{i_1=1}^3 \sum_{i_2=1}^3 \left\{ \{\Phi_k^0\}^T [\Delta K_{i_1}]_e^{Ext} \{\Phi_k^0\} \{\Phi_k^0\}^T [\Delta K_{i_2}]_e^{Ext} \{\Phi_k^0\} \times \int_{V_{e_1}} \int_{V_{e_2}} x_1^{i_1-1} y_1^2 x_2^{i_2-1} y_2^2 R_{ff} dV_{e_1} dV_{e_2} \right\} \\ &+ \sum_{e_1=1}^{N_e} \sum_{e_2=1}^{N_e} \sum_{i_1=1}^7 \sum_{i_2=1}^7 \left\{ \{\Phi_k^0\}^T \lambda_k^0 [\Delta M_{i_1}]_e^{Ext} \{\Phi_k^0\} \{\Phi_k^0\}^T \lambda_k^0 [\Delta M_{i_2}]_e^{Ext} \{\Phi_k^0\} \times \int_{V_{e_1}} \int_{V_{e_2}} x_1^{i_1-1} x_2^{i_2-1} R_{gg} dV_{e_1} dV_{e_2} \right\} \\ &+ 2 \sum_{e_1=1}^{N_e} \sum_{e_2=1}^{N_e} \sum_{i_1=1}^3 \sum_{i_2=1}^7 \left\{ \{\Phi_k^0\}^T [\Delta K_{i_1}]_e^{Ext} \{\Phi_k^0\} \{\Phi_k^0\}^T \{\Phi_k^0\}^T (-\lambda_k^0) [\Delta M_{i_2}]_e^{Ext} \{\Phi_k^0\} \times \int_{V_{e_1}} \int_{V_{e_2}} x_1^{i_1-1} y_1^2 x_2^{i_2-1} R_{fg} dV_{e_1} dV_{e_2} \right\} \end{aligned} \quad (2.67)$$

Để so sánh các chuỗi dữ liệu khác nhau thì COV của giá trị riêng được sử dụng để so sánh.

$$COV = \frac{\sqrt{Var[\lambda_k]}}{\mathbb{E}[\lambda_k]} \quad (2.68)$$

2.5. Phân tích đáp ứng của dầm có tính chất vật liệu ngẫu nhiên không gian bằng phương pháp mô phỏng Monte Carlo

2.5.1. Tạo mẫu trường ngẫu nhiên hai chiều tính chất vật liệu bằng phương pháp phổ

Sử dụng phương pháp biểu diễn phổ [107], [108] trường ngẫu nhiên được biểu diễn dưới dạng chuỗi lượng giác:

$$f(x, y) = \sqrt{2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \left\{ A_{n_1 n_2}^f \cos \left[\kappa_{1n_1}^f x + \kappa_{2n_2}^f y + \Phi_{n_1 n_2}^{(1f)} \right] + B_{n_1 n_2}^f \cos \left[\kappa_{1n_1}^f x - \kappa_{2n_2}^f y + \Phi_{n_1 n_2}^{(2f)} \right] \right\} \quad (2.69)$$

Trường ngẫu nhiên của mật độ khối lượng được biểu diễn như sau:

$$g(x, y) = \gamma \left(\frac{\sigma_f}{\sigma_g} \right) \sqrt{2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \left\{ A_{n_1 n_2}^f \cos \left[\kappa_{1n_1}^f x + \kappa_{2n_2}^f y + \Phi_{n_1 n_2}^{(1f)} \right] + B_{n_1 n_2}^f \cos \left[\kappa_{1n_1}^f x - \kappa_{2n_2}^f y + \Phi_{n_1 n_2}^{(2f)} \right] \right\} \\ + \sqrt{1 - \gamma^2} \sqrt{2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \left\{ A_{n_1 n_2}^g \cos \left[\kappa_{1n_1}^g x + \kappa_{2n_2}^g y + \Phi_{n_1 n_2}^{(1g)} \right] + B_{n_1 n_2}^g \cos \left[\kappa_{1n_1}^g x - \kappa_{2n_2}^g y + \Phi_{n_1 n_2}^{(2g)} \right] \right\} \quad (2.70)$$

2.5.2. Tạo mẫu trường ngẫu nhiên ba chiều tính chất vật liệu bằng phương pháp phổ

Trường ngẫu nhiên Gaussian, ba chiều, dừng, đơn biến được biểu diễn như sau:

$$f(x, y, z) = \sqrt{2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \sum_{n_3=0}^{N_3-1} \left\{ A_{n_1 n_2 n_3}^{(1f)} \cos \left[\kappa_{1n_1}^f x + \kappa_{2n_2}^f y + \kappa_{3n_3}^f z + \Phi_{n_1 n_2 n_3}^{(1f)} \right] + A_{n_1 n_2 n_3}^{(2f)} \cos \left[\kappa_{1n_1}^f x + \kappa_{2n_2}^f y - \kappa_{3n_3}^f z + \Phi_{n_1 n_2 n_3}^{(2f)} \right] \right. \\ \left. + A_{n_1 n_2 n_3}^{(3f)} \cos \left[\kappa_{1n_1}^f x - \kappa_{2n_2}^f y + \kappa_{3n_3}^f z + \Phi_{n_1 n_2 n_3}^{(3f)} \right] + A_{n_1 n_2 n_3}^{(4f)} \cos \left[\kappa_{1n_1}^f x - \kappa_{2n_2}^f y - \kappa_{3n_3}^f z + \Phi_{n_1 n_2 n_3}^{(4f)} \right] \right\} \quad (2.71)$$

Trường ngẫu nhiên mật độ khối lượng và trường ngẫu nhiên mô đun đàn hồi tương quan với nhau thông qua hệ số tương quan γ .

$$g(x, y, z) = \gamma \left(\frac{\sigma_f}{\sigma_g} \right) \sqrt{2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \sum_{n_3=0}^{N_3-1} \left\{ A_{n_1 n_2 n_3}^{(1f)} \cos \left[\kappa_{1n_1}^f x + \kappa_{2n_2}^f y + \kappa_{3n_3}^f z + \Phi_{n_1 n_2 n_3}^{(1f)} \right] + A_{n_1 n_2 n_3}^{(2f)} \cos \left[\kappa_{1n_1}^f x + \kappa_{2n_2}^f y - \kappa_{3n_3}^f z + \Phi_{n_1 n_2 n_3}^{(2f)} \right] \right. \\ \left. + A_{n_1 n_2 n_3}^{(3f)} \cos \left[\kappa_{1n_1}^f x - \kappa_{2n_2}^f y + \kappa_{3n_3}^f z + \Phi_{n_1 n_2 n_3}^{(3f)} \right] + A_{n_1 n_2 n_3}^{(4f)} \cos \left[\kappa_{1n_1}^f x - \kappa_{2n_2}^f y - \kappa_{3n_3}^f z + \Phi_{n_1 n_2 n_3}^{(4f)} \right] \right\} \\ + \sqrt{1 - \gamma^2} \sqrt{2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \sum_{n_3=0}^{N_3-1} \left\{ A_{n_1 n_2 n_3}^{(1g)} \cos \left[\kappa_{1n_1}^g x + \kappa_{2n_2}^g y + \kappa_{3n_3}^g z + \Phi_{n_1 n_2 n_3}^{(1g)} \right] + A_{n_1 n_2 n_3}^{(2g)} \cos \left[\kappa_{1n_1}^g x + \kappa_{2n_2}^g y - \kappa_{3n_3}^g z + \Phi_{n_1 n_2 n_3}^{(2g)} \right] \right. \\ \left. + A_{n_1 n_2 n_3}^{(3g)} \cos \left[\kappa_{1n_1}^g x - \kappa_{2n_2}^g y + \kappa_{3n_3}^g z + \Phi_{n_1 n_2 n_3}^{(3g)} \right] + A_{n_1 n_2 n_3}^{(4g)} \cos \left[\kappa_{1n_1}^g x - \kappa_{2n_2}^g y - \kappa_{3n_3}^g z + \Phi_{n_1 n_2 n_3}^{(4g)} \right] \right\} \quad (2.72)$$

2.5.3. Phân tích đáp ứng tĩnh của dầm có tính chất vật liệu ngẫu nhiên không gian bằng mô phỏng Monte Carlo

Sử dụng phương trình (2.69) hoặc (2.70) tạo ra N mẫu của trường ngẫu nhiên mô đun đàn hồi Phương trình cân bằng của toàn kết cấu được thiết lập theo FEM như (2.73) với U^i là véc tơ chuyển vị nút tổng thể của toàn kết cấu ở lần mô phỏng thứ i .

$$[K^i] \{U^i\} = \{P\} \quad (2.73)$$

Thực hiện tính lặp trên không gian mẫu của trường ngẫu nhiên mô đun đàn hồi thu được tập dữ liệu đáp ứng ngẫu nhiên của dầm. Xử lý thống kê trên tập hợp số liệu thu được các đặc trưng thống kê của chuyển vị nút thứ j : trung bình mẫu và phương sai mẫu, hệ số biến thiên.

$$\bar{U}_j = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N U_j^i; \quad s_{U_j}^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (U_j^i - \bar{U}_j)^2; \quad \text{COV} = \frac{\sqrt{s_{U_j}^2}}{|\bar{U}_j|} \quad (2.74)$$

2.5.4. Phân tích đặc trưng động lực học tuyến tính của dầm có tính chất vật liệu ngẫu nhiên không gian bằng mô phỏng Monte Carlo

Sử dụng phương trình (2.56) để xác định giá trị riêng ở lần mô phỏng thứ i theo (2.75).

$$\text{Det} \left[\left(\sum_{e=1}^{N_e} [K_0]_{e,i}^{\text{Ext}} + \sum_{e=1}^{N_e} [\Delta K]_{e,i}^{\text{Ext}} \right) - \lambda^i \left(\sum_{e=1}^{N_e} [M_0]_{e,i}^{\text{Ext}} + \sum_{e=1}^{N_e} [\Delta M]_{e,i}^{\text{Ext}} \right) \right] = 0 \quad (2.75)$$

Sử dụng phương trình (2.75) thu được giá trị riêng thứ k ở lần mô phỏng thứ i là λ_k^i . Xử lý số liệu thống kê trên tập dữ liệu thu được có thể xác định được giá trị trung bình và phương sai mẫu của giá trị riêng thứ k như các phương trình sau:

$$\bar{\lambda}_k = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \lambda_k^i; \quad s_{\lambda_k}^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\lambda_k^i - \bar{\lambda}_k)^2; \quad \text{COV} = \frac{\sqrt{s_{\lambda_k}^2}}{\bar{\lambda}_k} \quad (2.76)$$

2.6. Kiểm chứng mô hình phần tử hữu hạn ngẫu nhiên phân tích đáp ứng của dầm có tính chất vật liệu ngẫu nhiên không gian

2.6.1. Đánh giá hiệu ứng thứ cấp và cơ sở áp dụng mô hình dầm phẳng cho bài toán tính chất vật liệu ngẫu nhiên ba chiều

Các phân tích định lượng chỉ ra: ngay cả khi trường E có hệ số biến thiên lớn (lên đến 20%), sự thăng giáng của các đặc trưng hình học thứ cấp bao gồm độ dịch chuyển trọng tâm đàn hồi (y_n, z_n) và mô men quán tính ly tâm

(D_{yz}) chỉ dao động ở mức nhiễu (dưới 5%). Mô phỏng xác thực trên dầm công-xôn cho thấy hệ số biến thiên của các chuyển vị phái sinh nhỏ (dưới 2%) so với chuyển vị uốn chủ đạo. Sai lệch đáp ứng uốn giữa mô hình không gian xét đầy đủ hiệu ứng thứ cấp và mô hình dầm phẳng dưới ngưỡng 5%. Những kết quả này cho thấy việc áp dụng mô hình dầm 2D cho bài toán vật liệu ngẫu nhiên 3D là một bước đơn giản hóa, chấp nhận được trong phạm vi nghiên cứu.

2.6.2. Kiểm tra sự hội tụ của hệ số biến thiên đáp ứng của dầm theo mật độ lưới chia phần tử

Nhằm kiểm chứng tính ổn định số học của mô hình SFEM đề xuất, nghiên cứu tiến hành khảo sát sự hội tụ lưới phần tử trên cấu kiện dầm giản đơn. E và ρ là trường ngẫu nhiên không gian với kỳ vọng $E_0 = 30 \times 10^9 \text{ N/m}^2$, $\rho_0 = 2400 \text{ kg/m}^3$, $\sigma_f = \sigma_g = 0,05$ chiều dài tương quan $d_x = d_y = d_z = d$, thay đổi từ $0,01L$ đến $100L$. Hệ số biến thiên (COV) của chuyển vị giữa nhịp và các giá trị riêng được đánh giá thông qua các sơ đồ lưới $N_e = \{20, 30, 40\}$. Các kết quả phân tích chỉ ra rằng đáp ứng thống kê hội tụ rõ rệt và sai khác gần như triệt tiêu, khẳng định tính độc lập của lời giải đối với mật độ chia lưới.

2.6.3. Kiểm tra mô hình phương pháp phần tử hữu hạn ngẫu nhiên theo lý thuyết tính toán ngẫu nhiên

Theo nguyên lý cơ học ngẫu nhiên, hệ thống phải hội tụ về trạng thái bất định khi độ phân tán vật liệu là rất nhỏ. Bằng cách thiết lập độ lệch chuẩn của các trường ngẫu nhiên ở mức $\sigma_f = \sigma_g = 0,00001$ kết quả phân tích xác nhận rằng hệ số biến thiên (COV) của cả chuyển vị và các giá trị riêng đều suy giảm và tiệm cận về giá trị vô cùng nhỏ (không đáng kể). Sự hội tụ về nghiệm bất định này là minh chứng toán học, khẳng định tính đúng đắn, sự ổn định số học và độ chính xác của khung lý thuyết SFEM.

2.6.4. Kiểm chứng mô hình SFEM với nghiên cứu đã công bố

2.6.4.1. Kiểm chứng phân tích ứng xử tĩnh của dầm có tính chất vật liệu ngẫu nhiên không gian

Để xác thực độ tin cậy của thuật toán SFEM đề xuất, luận án tiến hành đối chiếu đáp ứng tĩnh ngẫu nhiên với nghiên cứu của Adhikari và Mukherjee [16] trên cấu kiện dầm công-xôn ($L = 1\text{m}$, $h = 0,03\text{m}$, $b = 0,003\text{m}$, kỳ vọng mô đun đàn hồi $E_0 = 30 \times 10^9 \text{ N/m}^2$) chịu lực tập trung tại đầu tự do. Nhằm thiết lập điều kiện tương thích từ khung mô hình đa chiều về bài toán một chiều (1D) của tài liệu đối chứng, chiều dài tương quan dọc trục được gán $d_x = L/10$, đồng thời các phương còn lại được thiết lập ở mức rất lớn ($d_y = d_z = 100L$) nhằm triệt tiêu sự thăng giáng ngẫu nhiên trên mặt cắt ngang, hạ bậc trường 3D về trạng thái tiệm cận đồng nhất theo lý thuyết trường ngẫu nhiên [51, 52]. Về mặt toán học, do đáp ứng chuyển vị được xấp xỉ thông qua khai triển Taylor bậc nhất của các biến ngẫu nhiên rời rạc hóa từ trường có kỳ vọng bằng không, kỳ vọng của chuyển vị chuẩn hóa luôn mang giá trị đơn vị. Sự hội tụ lý thuyết này, kết hợp cùng sự tương đồng chặt chẽ của độ lệch chuẩn chuyển vị so với kết quả mô phỏng MCS trong [16], đã cung cấp minh chứng toàn diện khẳng định tính chính xác và độ tin cậy của mô hình SFEM đa chiều được phát triển.

2.6.4.2. Kiểm chứng bài toán phân tích đặc trưng động lực học tuyến tính của dầm có tính chất vật liệu ngẫu nhiên không gian

Nhằm kiểm chứng độ tin cậy của mô hình SFEM đa chiều trong bài toán động lực học tuyến tính, luận án tiến hành đối chiếu COV của giá trị riêng thứ nhất với công trình của Hosseini và Khadem [63] trên cấu kiện dầm công-xôn ($L = 0,8\text{m}$, $b = 0,015\text{m}$, $h = 0,04\text{m}$; kỳ vọng $E_0 = 165,44 \times 10^9 \text{ N/m}^2$, $\rho_0 = 7830 \text{ kg/m}^3$). Cấu trúc trường ngẫu nhiên Gaussian được thiết lập với độ lệch chuẩn $\sigma_f = \sigma_g = 0,1$ và hệ số tương quan chéo $\gamma = \{0, 1\}$. Chiều dài tương quan dọc trục $d_x = L$ (theo thông số của [63]) và ($d_y = d_z = 100L$) để triệt tiêu sự biến thiên ngẫu nhiên theo phương ngang và đứng. Kết quả so sánh ghi nhận mức sai số rất nhỏ dưới 5%.

2.6.5. So sánh kết quả phân tích đáp ứng của dầm bằng phương pháp phần tử hữu hạn ngẫu nhiên với mô phỏng Monte Carlo

Để kiểm chứng độc lập độ tin cậy của mô hình SFEM, luận án ứng dụng phương pháp mô phỏng MCS dựa trên nguyên lý hội tụ thống kê đối với mẫu lớn. Cụ thể, phương pháp biểu diễn phổ được áp dụng để sinh $N = 10.000$ thể hiện của các trường ngẫu nhiên không gian E và ρ với độ lệch $\sigma_f = \sigma_g = 0,05$ đảm bảo tuân thủ nghiêm ngặt cấu trúc tương quan thiết lập ban đầu. Đáp ứng của từng mẫu tính chất vật liệu được giải quyết bằng FEM tiêu chuẩn để xây dựng tập dữ liệu thống kê tham chiếu. Khảo sát biểu đồ tần suất và biểu đồ Q-Q cho chuyển vị chuẩn hóa tại giữa nhịp (trong cả hai mô hình ngẫu nhiên 2D và 3D) cho thấy các phân vị mẫu bám sát đường tuyến tính lý thuyết, với độ lệch và độ nhọn tiệm cận phân phối chuẩn. Dù tồn tại một vài thăng giáng nhỏ tại vùng vạt đuôi, tổng thể chuyển vị đáp ứng hoàn toàn có thể được xem là xấp xỉ phân phối Gaussian. Sự hội tụ thống kê này, kết hợp với mức sai nhỏ đối với kỳ vọng và hệ số biến thiên (COV) giữa mô hình SFEM và MCS đã cung cấp minh chứng thực nghiệm số vững chắc để khẳng định độ chính xác của SFEM đề xuất.

Mở rộng sang bài toán phân tích đặc trưng động lực học tuyến tính, phân tích thống kê đối với giá trị riêng chuẩn hóa xác nhận sự tiệm cận chặt chẽ với phân phối chuẩn. Sự hội tụ này được minh chứng qua biểu đồ Q-Q bám sát đường tuyến tính lý thuyết, trong đó độ lệch và độ nhọn xấp xỉ đặc trưng Gaussian với sai khác hầu như không đáng kể tại các vùng vạt đuôi. Hơn thế nữa, sự đồng thuận cao về giá trị kỳ vọng và COV giữa SFEM và tập mẫu MCS dưới các mức thăng giáng vật liệu khác nhau đã minh chứng cho độ chính xác và tính ưu việt của khung lý thuyết SFEM đề xuất.

Để đánh giá toàn diện độ chính xác của thuật toán SFEM, COV của chuyển vị tĩnh và các giá trị riêng được đối chiếu trực tiếp với tập dữ liệu mô phỏng độc lập MCS. Phân tích được triển khai trên cả hai cấu trúc vật liệu ngẫu nhiên 2D và 3D, tích hợp khảo sát diện rộng với chiều dài tương quan biến thiên từ $0,01L$ đến $100L$. Quá trình đối sánh ghi nhận sự hội tụ giữa hai phương pháp khi mức sai số luôn được kiểm soát nghiêm ngặt dưới ngưỡng 5% trên

toàn miền khảo sát. Sự tương đồng định lượng này đóng vai trò là minh chứng độ tin cậy của khung lý thuyết SFEM đề xuất đối với cả bài toán tĩnh và bài toán phân tích đặc trưng động lực học tuyến tính.

2.7. Kết luận chương II

Việc thiết lập phương pháp SFEM để phân tích ứng xử cơ học của kết cấu dầm có tính chất vật liệu phân bố ngẫu nhiên không gian đã được thực hiện thành công trong Chương II. Các kết quả và đóng góp cốt lõi bao gồm:

- **Về phát triển khung lý thuyết và mô hình tính toán:** Luận án đã tích hợp thành công kỹ thuật tích phân trọng số để rời rạc hóa trường ngẫu nhiên đa chiều và phương pháp nhiễu loạn để lan truyền bất định. Cách tiếp cận này cho phép thiết lập tường minh các ma trận độ cứng và ma trận khối lượng ngẫu nhiên, từ đó giải quyết trực tiếp chuỗi xấp xỉ bậc nhất của đáp ứng kết cấu mà không đòi hỏi chi phí tính toán lặp khổng lồ.
- **Dựa trên mô hình SFEM được đề xuất, hai bài toán cơ bản của cơ học ngẫu nhiên đối với kết cấu dầm đã được giải quyết trọn vẹn tại Chương II:**
 - (i) *Phân tích tĩnh ngẫu nhiên:* Xác định trực tiếp các đặc trưng thống kê của chuyển vị.
 - (ii) *Phân tích đặc trưng động lực học tuyến tính ngẫu nhiên:* Xác định đặc trưng thống kê của các giá trị riêng.
- **Về kiểm chứng độ tin cậy và tính chính xác:** Thuật toán đề xuất đã vượt qua các bước đối chứng nghiêm ngặt mang tính hệ thống qua bốn tiêu chí:
 - ✓ Đảm bảo tính hội tụ số học và sự độc lập của lời giải với mật độ chia lưới phần tử.
 - ✓ Tiệm cận về nghiệm tất định khi tăng giá trị vật liệu tiến tới không, tuân thủ chặt chẽ logic vật lý của cơ học ngẫu nhiên.
 - ✓ Tương đồng cao (sai số dưới 5%) khi đối sánh trực tiếp với các nghiên cứu trước.
 - ✓ Phù hợp với mô phỏng MCS dựa trên mẫu lớn.

CHƯƠNG III: PHÁT TRIỂN PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN NGẪU NHIÊN PHÂN TÍCH ỔN ĐỊNH EULER CỦA CỘT CÓ TÍNH CHẤT VẬT LIỆU NGẪU NHIÊN KHÔNG GIAN

3.1. Phân tích ổn định Euler cột chịu nén đúng tâm bằng FEM

Phương trình vi phân cân bằng ổn định của cột như (3.1):
$$E_0 I \frac{d^4 w}{dx^4} + P \frac{d^2 w}{dx^2} = 0 \quad (3.1)$$

Phương trình phân tích ổn định của cột như phương trình (3.2):
$$([K] - \lambda [K_p]) \{\psi\} = 0 \quad (3.2)$$

Trong đó: $[K] = \sum_{e=1}^{N_e} [K]_e^{Ext}$, $[K_p] = \sum_{e=1}^{N_e} [K_p]_e^{Ext}$, $\lambda = P$ là giá trị riêng của lực tới hạn, $\{\psi\}$ là véc tơ chuyển vị nút của toàn bộ cột (dạng mất ổn định):

$$Det([K] - \lambda [K_p]) = 0 \quad (3.3)$$

$$[K]_e = \frac{E_0 I}{L_e^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L_e & -12 & 6L_e \\ & 4L_e^2 & -6L_e & 2L_e^2 \\ & & 12 & -6L_e \\ \text{sym.} & & & 4L_e^2 \end{bmatrix} \quad (3.4); \quad [K_p]_e = \begin{bmatrix} \frac{6}{5L_e} & \frac{1}{10} & -\frac{6}{5L_e} & \frac{1}{10} \\ & \frac{2L_e}{15} & -\frac{1}{10} & -\frac{L_e}{30} \\ & & \frac{6}{5L_e} & -\frac{1}{10} \\ \text{sym.} & & & \frac{2L_e}{15} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

3.2. Phát triển phương pháp phần tử hữu hạn ngẫu nhiên cho bài toán ổn định Euler

Xem xét kết cột mặt cắt ngang hình chữ nhật có mô đun đàn hồi thay đổi ngẫu nhiên không gian (hai chiều và ba chiều). Phương trình vi phân cân bằng ổn định của cột như (3.6).

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[\mathcal{D}(x, \theta) \frac{d^2 w(x, \theta)}{dx^2} \right] + P \frac{d^2 w(x, \theta)}{dx^2} = 0 \quad (3.6)$$

Với độ cứng uốn hiệu dụng được xác định như (3.7): $\mathcal{D}(x, \theta) = \int_A y_e^2 E(x, \theta) dydz \quad (3.7)$

Ma trận độ cứng hiệu dụng của phần tử dầm cột trong trường hợp mô đun đàn hồi ngẫu nhiên hai chiều như (3.8), ngẫu nhiên ba chiều như (3.9).

$$[k]_e = \underbrace{\int_{V_e} y_e^2 [N]^T E_0 [N] dV_e}_{[K_0]_e} + \underbrace{\int_{V_e} y_e^2 [N]^T E_0 f_e(x_e, y_e) [N] dV_e}_{\sum_{i=1}^{N_W} [AK_i]_e \Theta_{i,e}} - [K_p]_e \quad (3.8)$$

$$[k]_e = \underbrace{\int_{V_e} y_e^2 [N]^T E_0 [N] dV_e}_{[K_0]_e} + \underbrace{\int_{V_e} y_e^2 [N]^T E_0 f_e(x_e, y_e, z_e) [N] dV_e}_{\sum_{i=1}^{N_W} [AK_i]_e \Theta_{i,e}} - [K_p]_e \quad (3.9)$$

Các biến ngẫu nhiên cơ bản được rời rạc hóa từ trường ngẫu nhiên như phương trình (3.10), (3.11).

$$\Theta_{i,e} = \int_{A_e} y_e^2 x_e^{i-1} f_e(x_e, y_e) dA_e \quad (3.10); \quad \Theta_{i,e} = \int_{V_e} y_e^2 x_e^{i-1} f_e(x_e, y_e, z_e) dV_e \quad (3.11)$$

Ma trận độ cứng tổng thể $[k]$ của toàn kết cấu cột được xây dựng từ $[k_e]$ như (3.12).

$$[k] = \sum_{e=1}^{N_e} [k_e] = \underbrace{\sum_{e=1}^{N_e} [K_0]_e^{Ext}}_{[K(\{\lambda\})]} + \underbrace{\sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^{N_w} [\Delta K_i]_e^{Ext} \Theta_{i,e}}_{[K_p]} - P \underbrace{\sum_{e=1}^{N_e} [K_p]_e^{Ext}}_{[K_p]} \quad (3.12)$$

Đối với dạng mất ổn định thứ k thì phương trình mất ổn định được viết như (3.13):

$$([K(\{\Theta\})] - \lambda^k(\{\Theta\})[K_p])\{\psi^k(\{\Theta\})\} = \{0\} \quad (3.13)$$

Triển khai chuỗi Taylor các đại lượng xuất hiện trong (3.13) xung quanh giá trị kỳ vọng của các đại lượng thu được các phương trình (3.14) - (3.16).

$$[K] \approx \sum_{e=1}^{N_e} [K_0]_e^{Ext} + \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^{N_w} \left[\frac{\partial [K(\{\Theta\})]}{\partial \Theta_{i,e}} \right]_{\bar{\Theta}_{i,e}} \Theta_{i,e} + \frac{1}{2} \sum_{e_1=1}^{N_e} \sum_{e_2=1}^{N_e} \sum_{i_1=1}^{N_w} \sum_{i_2=1}^{N_w} \left[\frac{\partial^2 [K(\{\Theta\})]}{\partial \Theta_{i_1,e_1} \partial \Theta_{i_2,e_2}} \right]_{\bar{\Theta}_{i,e}} \Theta_{i_1,e_1} \Theta_{i_2,e_2} + \dots \quad (3.14)$$

$$\lambda^k(\{\Theta\}) \approx \lambda_0^k + \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^{N_w} \left[\frac{\partial \lambda^k(\{\Theta\})}{\partial \Theta_{i,e}} \right]_{\bar{\Theta}_{i,e}} \Theta_{i,e} + \frac{1}{2} \sum_{e_1=1}^{N_e} \sum_{e_2=1}^{N_e} \sum_{i_1=1}^{N_w} \sum_{i_2=1}^{N_w} \left[\frac{\partial^2 \lambda^k(\{\Theta\})}{\partial \Theta_{i_1,e_1} \partial \Theta_{i_2,e_2}} \right]_{\bar{\Theta}_{i,e}} \Theta_{i_1,e_1} \Theta_{i_2,e_2} + \dots \quad (3.15)$$

$$\{\psi^k\} = \{\psi_0^k\} + \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^{N_w} \left[\frac{\partial \{\psi^k(\{\Theta\})\}}{\partial \Theta_{i,e}} \right]_{\bar{\Theta}_{i,e}} \Theta_{i,e} + \frac{1}{2} \sum_{e_1=1}^{N_e} \sum_{e_2=1}^{N_e} \sum_{i_1=1}^{N_w} \sum_{i_2=1}^{N_w} \left[\frac{\partial^2 \{\psi^k(\{\Theta\})\}}{\partial \Theta_{i_1,e_1} \partial \Theta_{i_2,e_2}} \right]_{\bar{\Theta}_{i,e}} \Theta_{i_1,e_1} \Theta_{i_2,e_2} + \dots \quad (3.16)$$

Đạo hàm riêng bậc nhất của giá trị riêng thứ k của lực tới hạn theo $\Theta_{i,e}$ được xác định như (3.17).

$$\left[\frac{\partial \lambda^k(\{\Theta\})}{\partial \Theta_{i,e}} \right]_{\bar{\Theta}_{i,e}} = \frac{\{\psi_o^k\}^T \left[\frac{\partial [K(\{\Theta\})]}{\partial \Theta_{i,e}} \right]_{\bar{\Theta}_{i,e}} \{\psi_o^k\}}{\{\psi_o^k\}^T [K_p] \{\psi_o^k\}} \quad (3.17)$$

Xấp xỉ bậc nhất của giá trị riêng của lực tới hạn theo các biến ngẫu nhiên như (3.18).

$$\lambda^k(\{\Theta\}) \approx \lambda_0^k + \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^{N_w} \frac{\{\psi_o^k\}^T \left[\frac{\partial [K(\{\Theta\})]}{\partial \Theta_{i,e}} \right]_{\bar{\Theta}_{i,e}} \{\psi_o^k\}}{\{\psi_o^k\}^T [K_p] \{\psi_o^k\}} \Theta_{i,e} \quad (3.18)$$

Kỳ vọng và phương sai của giá trị riêng thứ k của lực tới hạn được xác định (3.19), (3.20)

$$\mathbb{E}(\lambda^k) = \mathbb{E} \left[\lambda_0^k + \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^{N_w} \frac{\{\psi_o^k\}^T \left[\frac{\partial [K(\{\Theta\})]}{\partial \Theta_{i,e}} \right]_{\bar{\Theta}_{i,e}} \{\psi_o^k\}}{\{\psi_o^k\}^T [K_p] \{\psi_o^k\}} \Theta_{i,e} \right] \approx \lambda_0^k \quad (3.19)$$

$$Var(\lambda^k) = \sum_{e_1=1}^{N_e} \sum_{e_2=1}^{N_e} \sum_{i_1=1}^{N_w} \sum_{i_2=1}^{N_w} \left\{ \frac{\{\psi_o^k\}^T \left[\frac{\partial [K(\{\Theta\})]}{\partial \Theta_{i_1,e_1}} \right]_{\bar{\Theta}_{i,e}} \{\psi_o^k\} \{\psi_o^k\} \{\psi_o^k\}^T \left[\frac{\partial [K(\{\Theta\})]}{\partial \Theta_{i_2,e_2}} \right]_{\bar{\Theta}_{i,e}} \{\psi_o^k\}}{\{\psi_o^k\}^T [K_p] \{\psi_o^k\} \{\psi_o^k\}^T [K_p] \{\psi_o^k\}} \mathbb{E}[\Theta_{i_1,e_1} \Theta_{i_2,e_2}] \right\} \quad (3.20)$$

Phương sai của lực tới hạn của cột có mô đun đàn hồi ngẫu nhiên hai chiều (3.21):

$$Var(\lambda^k) = \sum_{e_1=1}^{N_e} \sum_{e_2=1}^{N_e} \sum_{i_1=1}^{N_w} \sum_{i_2=1}^{N_w} \left\{ \frac{\left\{ \psi_o^k \right\}^T \left[\frac{\partial [K(\{\Theta\})]}{\partial \Theta_{i_1, e_1}} \right]_{\bar{\Theta}_{i_1, e_1}} \left\{ \psi_o^k \right\} \left\{ \psi_o^k \right\}^T \left[\frac{\partial [K(\{\Theta\})]}{\partial \Theta_{i_2, e_2}} \right]_{\bar{\Theta}_{i_2, e_2}} \left\{ \psi_o^k \right\}}{\left\{ \psi_o^k \right\}^T [K_P] \left\{ \psi_o^k \right\} \left\{ \psi_o^k \right\}^T [K_P] \left\{ \psi_o^k \right\}} \int_{A_1} \int_{A_2} y_{e_1}^2 x_{e_1}^{i_1-1} y_{e_2}^2 x_{e_2}^{i_2-1} R_{f_{e_1} f_{e_2}} dA_{e_1} dA_{e_2} \right\} \quad (3.21)$$

Phương sai của lực tới hạn của cột có mô đun đàn hồi ngẫu nhiên ba chiều (3.22).

$$Var(\lambda^k) = \sum_{e_1=1}^{N_e} \sum_{e_2=1}^{N_e} \sum_{i_1=1}^{N_w} \sum_{i_2=1}^{N_w} \left\{ \frac{\left\{ \psi_o^k \right\}^T \left[\frac{\partial [K(\{\Theta\})]}{\partial \Theta_{i_1, e_1}} \right]_{\bar{\Theta}_{i_1, e_1}} \left\{ \psi_o^k \right\} \left\{ \psi_o^k \right\}^T \left[\frac{\partial [K(\{\Theta\})]}{\partial \Theta_{i_2, e_2}} \right]_{\bar{\Theta}_{i_2, e_2}} \left\{ \psi_o^k \right\}}{\left\{ \psi_o^k \right\}^T [K_P] \left\{ \psi_o^k \right\} \left\{ \psi_o^k \right\}^T [K_P] \left\{ \psi_o^k \right\}} \int_{V_{e_1}} \int_{V_{e_2}} y_{e_1}^2 x_{e_1}^{i_1-1} y_{e_2}^2 x_{e_2}^{i_2-1} R_{f_{e_1} f_{e_2}} dV_{e_1} dV_{e_2} \right\} \quad (3.22)$$

COV của lực tới hạn được xác định như (3.23).

$$COV = \frac{\sqrt{Var[\lambda^k]}}{\mathbb{E}[\lambda^k]} \quad (3.23)$$

3.3. Phân tích ổn định Euler ngẫu nhiên cột có tính chất vật liệu ngẫu nhiên không gian bằng mô phỏng Monte Carlo

Sử dụng kỹ thuật biểu diễn phổ để biểu diễn trường mô đun đàn hồi ngẫu nhiên hai chiều như phương trình (3.24) và ngẫu nhiên ba chiều như phương trình (3.25).

$$f(x, y) = \sqrt{2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \left\{ A_{n_1 n_2} \cos \left[\kappa_{1n_1} x + \kappa_{2n_2} y + \Phi_{n_1 n_2}^{(1)} \right] + B_{n_1 n_2} \cos \left[\kappa_{1n_1} x - \kappa_{2n_2} y + \Phi_{n_1 n_2}^{(2)} \right] \right\} \quad (3.24)$$

$$f(x, y, z) = \sqrt{2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \sum_{n_3=0}^{N_3-1} \left\{ A_{n_1 n_2 n_3}^{(1)} \cos \left[\kappa_{1n_1} x + \kappa_{2n_2} y + \kappa_{3n_3} z + \Phi_{n_1 n_2 n_3}^{(1)} \right] + A_{n_1 n_2 n_3}^{(2)} \cos \left[\kappa_{1n_1} x + \kappa_{2n_2} y - \kappa_{3n_3} z + \Phi_{n_1 n_2 n_3}^{(2)} \right] \right. \\ \left. + A_{n_1 n_2 n_3}^{(3)} \cos \left[\kappa_{1n_1} x - \kappa_{2n_2} y + \kappa_{3n_3} z + \Phi_{n_1 n_2 n_3}^{(3)} \right] + A_{n_1 n_2 n_3}^{(4)} \cos \left[\kappa_{1n_1} x - \kappa_{2n_2} y - \kappa_{3n_3} z + \Phi_{n_1 n_2 n_3}^{(4)} \right] \right\} \quad (3.25)$$

Dựa trên tập dữ liệu được tạo ra kết hợp với FEM tiêu chuẩn có thể xác định được giá trị riêng thứ k của lực tới hạn ở lần mô phỏng thứ i như phương trình sau:

$$Det \left(\sum_{e=1}^{N_e} [K_0]_e^{Ext} + \sum_{e=1}^{N_e} [\Delta K]_e^{Ext} - \lambda_i^k \sum_{e=1}^{N_e} [K_P]_e^{Ext} \right) = 0 \quad (3.26)$$

Dựa vào (3.26) để phân tích nhận được N giá trị riêng thứ k của lực tới hạn. Xử lý thống kê trên tập dữ liệu nhận được có thể xác định được đặc trưng thống kê của mẫu bao gồm giá trị trung bình và phương sai như các phương trình sau:

$$\bar{\lambda}_k = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \lambda_i^k \quad (3.27); \quad s_{\lambda_k}^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\lambda_i^k - \bar{\lambda}_k)^2 \quad (3.28)$$

Hệ số biến thiên của giá trị riêng lực tới hạn được xác định như phương trình (3.29): $COV = \frac{\sqrt{s_{\lambda_k}^2}}{\bar{\lambda}_k}$ (3.29)

3.4. Kiểm chứng mô hình phần tử hữu hạn ngẫu nhiên phân tích ổn định Euler của cột có tính chất vật liệu ngẫu nhiên không gian

3.4.1. Đối sánh mô hình dầm phẳng và không gian trong phân tích ổn định ngẫu nhiên

Để phân tích toàn diện ổn định của cột dưới tác động của trường mô đun đàn hồi ngẫu nhiên ba chiều, hệ thống ban đầu được xem xét qua mô hình dầm không gian (12 bậc tự do). Về mặt cơ học, sự thẳng giáng vật liệu trên mặt cắt ngang làm phát sinh các đặc trưng ngẫu nhiên bao gồm mô men tĩnh (S_y, S_z) và độ cứng đàn hồi ly tâm (D_{yz}), trực tiếp kích thích hiệu ứng ghép cặp không gian trong ma trận độ cứng. Tuy nhiên, xét trên bình diện thống kê, do trường vật liệu biến thiên quanh giá trị kỳ vọng là hằng số, các đại lượng lệch tâm này có kỳ vọng lý thuyết bằng không. Hệ quả toán học tất yếu là ở trạng thái trung bình, các khối ma trận ghép cặp dần triệt tiêu, khiến bài toán không gian 3D suy biến và phân tách thành các bài toán ổn định phẳng độc lập. Nhằm kiểm chứng luận án tiến hành khảo sát lực tới hạn Euler trên cột chịu nén đúng tâm một đầu ngàm một đầu tự do ($L = 8m$, tiết diện $b = 0,25m$, $h = 0,25m$, kỳ vọng $E_0 = 30 \times 10^9 N/m^2$, hệ số biến thiên 20%). Các kết quả thống kê xác nhận mức độ sai lệch về kỳ vọng và độ lệch chuẩn của lực tới hạn giữa mô hình 3D và mô hình dầm phẳng là nhỏ (tối đa chỉ 1,33% đối với kỳ vọng và 2,67% đối với độ lệch chuẩn). Sự hội tụ số học này cung cấp minh chứng vững chắc để khẳng định: việc ứng dụng mô hình dầm phẳng giản lược trong phân tích ổn định ngẫu nhiên 3D là hợp lý, đồng thời tối ưu để khối lượng tính toán.

3.4.2. Kiểm tra sự hội tụ của hệ số biến thiên lực tới hạn theo mật độ lưới chia phần tử

Bài toán khảo sát cấu kiện cột chịu nén đúng tâm (chiều dài 8m, tiết diện $0,25 \text{ m} \times 0,25 \text{ m}$) dưới bốn điều kiện biên: ngàm-ngàm (C-C), ngàm-khớp (C-H), khớp-khớp (H-H) và ngàm-tự do (C-F). Mô đun đàn hồi là trường ngẫu nhiên Gaussian dừng, đơn biến trong không gian (2D và 3D), với kỳ vọng $E_0 = 30 \times 10^9 \text{ N/m}^2$, độ lệch chuẩn $\sigma = 0,05$ và chiều dài tương quan biến thiên trong $[0,01L, 100L]$.

Nhằm kiểm chứng tính ổn định số học, COV của lực tới hạn Euler được phân tích qua các sơ đồ rời rạc hóa với số lượng phần tử $N_e = \{20, 30, 40\}$. Kết quả khảo sát chỉ ra rằng đáp ứng thống kê của lực tới hạn hội tụ khi mật độ lưới đạt 40 phần tử. Lời giải số học duy trì độ ổn định cao, độc lập với mật độ lưới chia. Dựa trên cơ sở đó, lưới $N_e = 40$ được lựa chọn cho toàn bộ các bước phân tích tiếp theo, đảm bảo sự cân bằng tối ưu giữa độ chính xác của kết quả và hiệu năng tính toán.

3.4.3. Kiểm tra mô hình phần tử hữu hạn ngẫu nhiên theo lý thuyết tính toán ngẫu nhiên

Theo cơ học ngẫu nhiên, khi thăng giáng của trường tính chất vật liệu tiến dần về không, hệ thống bất định hội tụ về trạng thái tất định. Để xác thực đặc tính lý thuyết này, luận án khảo sát mô hình với trường mô đun đàn hồi có độ lệch chuẩn siêu nhỏ ($\sigma = 10^{-5}$). Kết quả phân tích minh chứng rằng COV của lực tới hạn Euler đồng loạt suy giảm và tiệm cận giá trị rất nhỏ. Sự triệt tiêu hoàn toàn thành phần ngẫu nhiên trong đáp ứng của cột phản ánh chuẩn xác quy luật tiệm cận vật lý của hệ thống. Sự hội tụ toán học này cung cấp minh chứng nền tảng để khẳng định tính đúng đắn, sự ổn định số học và độ tin cậy của khung lý thuyết SFEM được phát triển cho bài toán phân tích ổn định ngẫu nhiên.

3.4.4. Kiểm chứng mô hình phần tử hữu hạn ngẫu nhiên với nghiên cứu đã công bố

Để xác thực độ tin cậy khung lý thuyết SFEM, bài toán ổn định ngẫu nhiên được đối sánh trực tiếp tài liệu [136] trên cấu kiện cột khớp-khớp chịu nén đúng tâm ($L = 2 \text{ m}$, tiết diện $0,3 \text{ m} \times 0,3 \text{ m}$, $E_0 = 30 \times 10^9 \text{ N/m}^2$, Tài liệu [136] sử dụng phương pháp biểu diễn chuỗi trực giao và nhiễu loạn bậc hai để giải quyết trường độ cứng ngẫu nhiên một chiều (1D). Luận án thiết lập chiều dài tương quan dọc trục d_x tương đồng với [136] ($d_x = 4 \text{ m}$ và 12 m), đồng thời khuếch đại các phương ngang ($d_y = d_z = 100L$) để triệt tiêu thăng giáng trên mặt cắt, ép trường ngẫu nhiên 2D/3D tiệm cận hoàn hảo về ứng xử 1D.

Kỳ vọng của lực tới hạn chuẩn hóa từ mô hình SFEM đề xuất hội tụ về giá trị lý thuyết, với sai số so với [136] nhỏ (luôn dưới 1%). Tương tự, hệ số biến thiên COV cũng ghi nhận mức sai lệch được kiểm soát chặt chẽ dưới ngưỡng 5%. Sự khác biệt này hoàn toàn có thể lý giải bởi bản chất khác biệt trong kỹ thuật rời rạc hóa trường ngẫu nhiên và bậc khai triển nhiễu loạn giữa hai nghiên cứu. Kết quả kiểm chứng này không chỉ khẳng định độ tin cậy của thuật toán SFEM đề xuất mà còn minh chứng tính bao trùm của mô hình đa chiều: một mô hình 3D tổng quát hoàn toàn có khả năng suy biến để giải quyết chính xác các bài toán 1D truyền thống.

3.4.5. So sánh kết quả phân tích ổn định Euler của cột bằng phần tử hữu hạn ngẫu nhiên với mô phỏng Monte Carlo

Nhằm kiểm chứng độc lập độ tin cậy của thuật toán SFEM trong bài toán ổn định, luận án triển khai mô phỏng MCS dựa trên kỹ thuật biểu diễn phổ kết hợp FEM tiêu chuẩn, với tập mẫu $N = 10.000$ thể hiện của trường mô đun đàn hồi ngẫu nhiên không gian. Đánh giá thống kê trên tập đáp ứng lực tới hạn chuẩn hóa chỉ ra sự hội tụ xấp xỉ về phân phối Gaussian, minh chứng qua biểu đồ Q-Q bám sát đường tham chiếu lý thuyết cùng các hệ số độ lệch và độ nhọn tiệm cận chuẩn. Đối sánh định lượng về kỳ vọng và COV giữa hai phương pháp ghi nhận sai khác nhỏ. Đáng chú ý, tại các miền tương quan không gian ngắn (nơi mức độ thăng giáng vật liệu diễn ra mạnh), COV từ mô phỏng MCS có xu hướng lớn hơn so với lời giải SFEM; tuy nhiên, độ lệch này nhanh chóng suy giảm khi chiều dài tương quan tăng, phản ánh chuẩn xác trạng thái tiệm cận đồng nhất của trường vật liệu. Với biên độ sai số dưới ngưỡng 5%, kết quả thực nghiệm số này đã khẳng định tính chính xác, sự phù hợp của khung lý thuyết SFEM đề xuất.

3.5. Kết luận chương III

Kế thừa nền tảng kỹ thuật tích phân trọng số từ Chương II, khung lý thuyết SFEM đã được mở rộng và thiết lập thành công tại Chương III nhằm giải quyết trọn vẹn bài toán ổn định Euler của cột chịu nén đúng tâm dưới tác động của trường mô đun đàn hồi phân bố ngẫu nhiên trong không gian (2D và 3D). Các kết quả và đóng góp khoa học cốt lõi bao gồm:

- **Về phát triển khung lý thuyết tính toán:** Luận án đã tích hợp thành công kỹ thuật nhiễu loạn để thiết lập chuỗi xấp xỉ Taylor bậc nhất cho tải trọng tới hạn. Khung SFEM này cho phép lan truyền trực tiếp tính bất định không gian từ cấu trúc vật liệu, qua đó xác định tường minh các đặc trưng thống kê bậc thấp (kỳ vọng, phương sai, hệ số biến thiên) của lực tới hạn Euler mà không đòi hỏi chi phí tính toán lặp.
- **Về kiểm chứng độ tin cậy và tính chính xác:** Thuật toán SFEM đề xuất đã minh chứng tính chính xác, ổn định toán học thông qua ba tiêu chuẩn:
 - ✓ Hội tụ số học tuyệt đối, hoàn toàn độc lập với mật độ chia lưới phần tử.
 - ✓ Tiệm cận hoàn hảo về nghiệm của bài toán tất định khi thăng giáng vật liệu tiến về không, đảm bảo tính nhất quán với nền tảng cơ học ngẫu nhiên.
 - ✓ Đạt độ chính xác đồng thuận (mức sai số luôn được kiểm soát dưới 5%) khi đối sánh chéo với nghiên cứu đã công bố và phương pháp thống kê dựa trên mô phỏng MCS.

CHƯƠNG IV: KHẢO SÁT ẢNH HƯỞNG CỦA CÁC YẾU TỐ TRƯỜNG NGẪU NHIÊN ĐẾN ĐẶC TRƯNG THỐNG KÊ ĐÁP ỨNG CỦA DÀM, CỘT

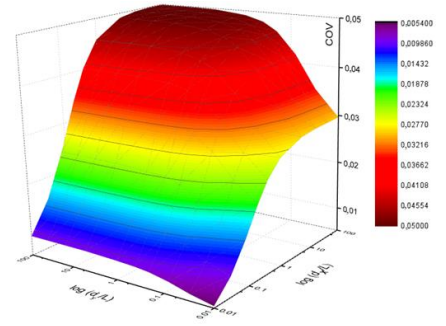
4.1. Khảo sát định lượng đáp ứng tĩnh ngẫu nhiên của dầm có mô đun đàn hồi ngẫu nhiên không gian

4.1.1. Phân tích ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến ứng xử tĩnh của dầm có tính chất vật liệu ngẫu nhiên

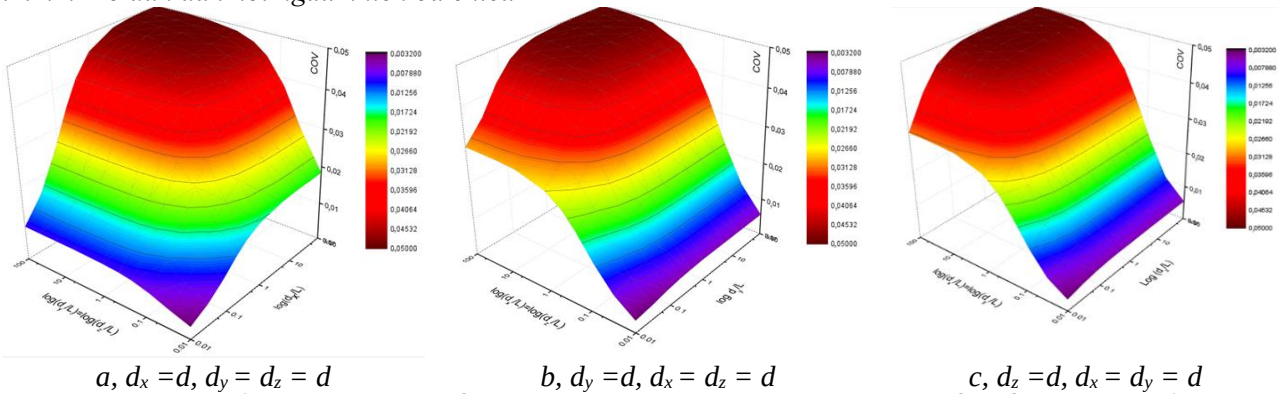
4.1.1.1. Mô đun đàn hồi ngẫu nhiên hai chiều

Để đánh giá ảnh hưởng của cấu trúc tương quan không gian đến độ phân tán của đáp ứng kết cấu, luận án tiến hành khảo sát sự biến thiên hệ số biến thiên (COV) của chuyển vị theo chiều dài tương quan d_x và d_y trong dải giá trị từ $0,01L$ đến $100L$ (Hình 4.1). Kết quả phân tích cho thấy COV của chuyển vị tăng cùng với độ tăng của chiều dài tương quan. Cụ thể, trong miền chiều dài tương quan nhỏ, COV tăng nhanh (gần như tuyến tính) do trường vật liệu dao động mạnh, dẫn đến hiệu ứng trung bình hóa không gian phát huy tối đa tác dụng làm giảm độ phân tán của đáp ứng tổng thể. Ngược lại, khi chiều dài tương quan vượt qua kích thước đặc trưng của kết cấu, mức độ gia tăng của COV dần bão hòa. Ở giới hạn lý thuyết khi chiều dài tương quan tiến tới vô cùng, tương đương với việc trường ngẫu nhiên suy biến thành một biến ngẫu nhiên đồng nhất trên toàn miền COV của chuyển vị tiệm cận về giá trị độ lệch chuẩn của trường vật liệu đầu vào. Quy luật biến thiên này phản ánh độ nhạy của kết cấu đối với tính ngẫu nhiên không gian, đồng thời tuân thủ chặt chẽ các nguyên lý nền tảng của cơ học ngẫu nhiên.

4.1.1.2. Mô đun đàn hồi ngẫu nhiên ba chiều



Hình 4.1. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan trong không gian hai chiều đến COV chuyển vị



a, $d_x = d, d_y = d, d_z = d$

b, $d_y = d, d_x = d, d_z = d$

c, $d_z = d, d_x = d, d_y = d$

Hình 4.2. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan trong không gian ba chiều đến COV chuyển vị

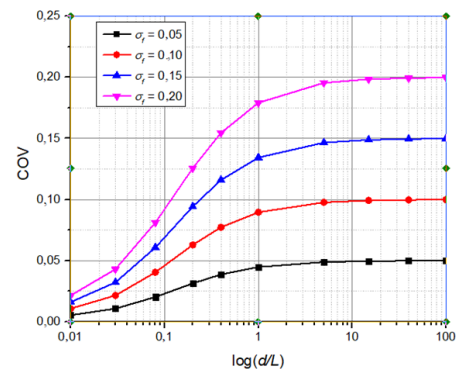
Mở rộng phân tích đối với trường ngẫu nhiên ba chiều (Hình 4.2), luận án đánh giá mức độ ảnh hưởng của các thành phần chiều dài tương quan (d_x, d_y, d_z) đến COV của chuyển vị giữa nhịp trong dải khảo sát từ $0,01L$ đến $100L$. Kết quả phản ánh một quy luật nhất quán trên mọi kịch bản. Tại dải tương quan ngắn, COV thể hiện độ nhạy rất cao với sự gia tăng của chiều dài tương quan; điển hình ở kịch bản ($d_x = d_y = d_z = d$), khi d tăng 2,67 lần (từ $0,03L$ lên $0,08L$), COV tăng mạnh tới 2,15 lần (từ 0,0086 lên 0,0185). Ngược lại, khi vượt qua kích thước đặc trưng của kết cấu tiến vào dải tương quan lớn, sự gia tăng bão hòa; minh chứng là khi d tiếp tục tăng 2,5 lần (từ $40L$ lên $100L$), đáp ứng COV gần như bất biến (chỉ tăng nhỏ từ 0,0498 lên 0,0499). Hiện tượng phi tuyến này khẳng định giới hạn tiệm cận toán học của hệ thống: khi d lớn vô cùng, trường ngẫu nhiên không gian tiệm cận trạng thái đồng nhất (suy biến thành biến ngẫu nhiên tổng thể), kéo theo COV của chuyển vị hội tụ tuyệt đối về đúng giá trị độ lệch chuẩn ban đầu của vật liệu.

4.1.2. Phân tích ảnh hưởng của hệ số biến thiên của mô đun đàn hồi đến COV của chuyển vị

4.1.2.1. Mô đun đàn hồi ngẫu nhiên hai chiều

Trong thiết lập trường ngẫu nhiên Gaussian, hệ số biến thiên của mô đun đàn hồi tương đương về mặt giá trị toán học với độ lệch chuẩn đầu vào σ_f . Nhằm đánh giá độ nhạy của hệ thống đối với mức độ phân tán vật liệu, luận án tiến hành khảo sát sự biến thiên COV của chuyển vị theo $\sigma_f = [0,00; 0,20]$ kết hợp cùng các cấp chiều dài tương quan $d_x = d_y = d$ trải rộng từ $0,01L$ đến $100L$. Kết quả phân tích (Hình 4.3) xác nhận một tương quan dương tuyến tính và nhất quán trên toàn bộ miền khảo sát: COV của chuyển vị luôn đồng biến với độ phân tán của mô đun đàn hồi. Đáng chú ý, tốc độ gia tăng của đáp ứng đầu ra chịu sự chi phối trực tiếp từ cấu trúc không gian của trường vật liệu. Cụ thể, khi chiều dài tương quan d càng lớn, hiệu ứng trung bình hóa không gian càng suy yếu, qua đó khuếch đại mạnh mẽ tác động của mức thăng giáng σ_f lên toàn hệ thống.

4.1.2.2. Mô đun đàn hồi ngẫu nhiên ba chiều

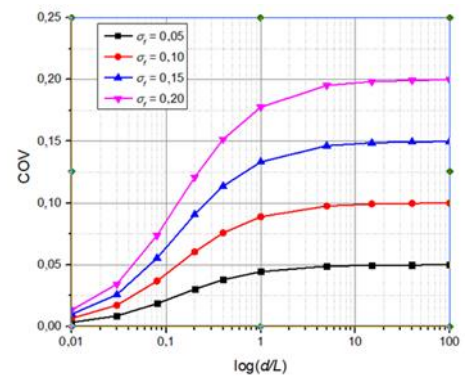


Hình 4.3. Ảnh hưởng của σ_f của trường ngẫu nhiên hai chiều đến COV của chuyển vị

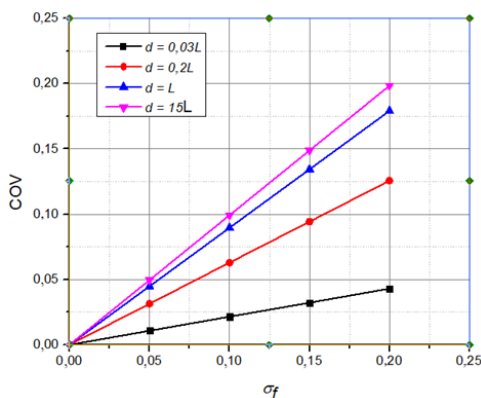
Mở rộng khảo sát sang mô hình trường ngẫu nhiên ba chiều, nghiên cứu tiến hành đánh giá độ nhạy của hệ thống thông qua bốn cấp độ thăng giáng vật liệu ($\sigma_f = 0,05; 0,10; 0,15; 0,20$) quét trên toàn dải chiều dài tương quan từ $0,01L$ đến $100L$ (Hình 4.4). Dữ liệu phân tích tái khẳng định sự nhất quán của hệ thống đối với quy luật cơ học đã ghi nhận ở mô ngẫu nhiên 2D: COV của chuyển vị luôn biểu diễn mối tương quan dương đồng biến với độ lệch chuẩn của mô đun đàn hồi.

4.1.3. Phân tích quan hệ giữa hệ số biến thiên của chuyển vị và hệ số biến thiên của mô đun đàn hồi ngẫu nhiên không gian

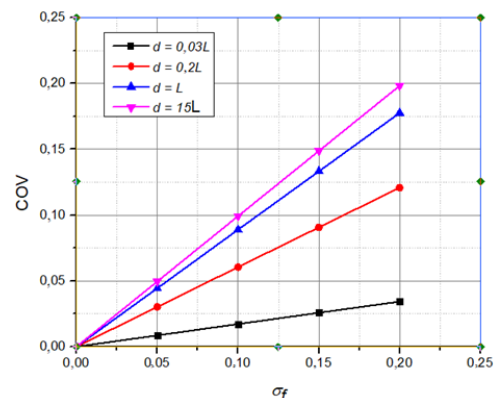
Để phân tích định lượng cơ chế lan truyền bất định, Hình 4.5 minh họa mối quan hệ giữa COV của chuyển vị và độ lệch chuẩn của trường vật liệu tại bốn mức chiều dài tương quan đại diện: $d = \{0,03L; 0,2L; 1L, 15L\}$ đối với cả hai mô hình ngẫu nhiên 2D ($d_x = d_y = d$) và 3D ($d_x = d_y = d_z = d$). Kết quả khảo sát đồng loạt xác nhận một quy luật trên mọi kích bản: mức độ phân tán của đáp ứng chuyển vị gia tăng tuyến tính và tỉ lệ với độ thăng giáng của mô đun đàn hồi. Sự phụ thuộc tuyến tính này phản ánh bản chất truyền dẫn thống kê ổn định của hệ thống, cung cấp cơ sở lý thuyết để dự báo nhanh các đặc trưng đáp ứng ngẫu nhiên của dầm khi biết được tham số ngẫu nhiên đầu vào.



Hình 4.4. Ảnh hưởng của độ lệch chuẩn trường ngẫu nhiên ba chiều đến COV của chuyển vị



a, Mô đun đàn hồi ngẫu nhiên hai chiều

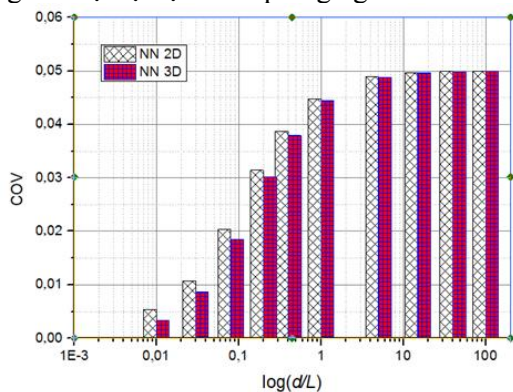


b, Mô đun đàn hồi ngẫu nhiên ba chiều

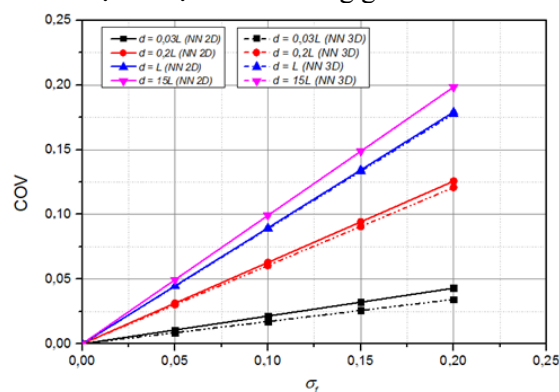
Hình 4.5. Quan hệ giữa COV của chuyển vị và COV của mô đun đàn hồi ngẫu nhiên

4.1.4. So sánh ứng xử tĩnh ngẫu nhiên của dầm có mô đun đàn hồi ngẫu nhiên hai chiều và ba chiều

Hình 4.6 đối sánh trực tiếp mức độ phân tán chuyển vị của dầm dưới tác động của trường mô đun đàn hồi ngẫu nhiên 2D và 3D, với chiều dài tương quan biến thiên trong $[0,01L, 100L]$. Tại miền tương quan ngắn, sự thăng giáng mạnh mẽ khiến vật liệu bị phân mảnh thành nhiều thể tích ngẫu nhiên độc lập. Do trường 3D sở hữu số lượng thể tích độc lập lớn hơn so với trường 2D, hiệu ứng trung bình hóa không gian mạnh hơn, kéo theo COV của chuyển vị trong mô hình 3D suy giảm và nhỏ hơn so với mô hình 2D. Ngược lại, khi chiều dài tương quan vượt qua kích thước đặc trưng của kết cấu, cả hai trường vật liệu đều tiệm cận trạng thái đồng nhất và cùng suy biến thành một biến ngẫu nhiên toàn cục. Tại giới hạn này, chênh lệch thống kê giữa mô hình 2D và 3D gần như triệt tiêu hoàn toàn, minh chứng cho sự hội tụ của đáp ứng ngẫu nhiên bất chấp sự khác biệt về bậc chiều không gian.



a, Ảnh hưởng của chiều dài tương quan trường ngẫu nhiên đến COV



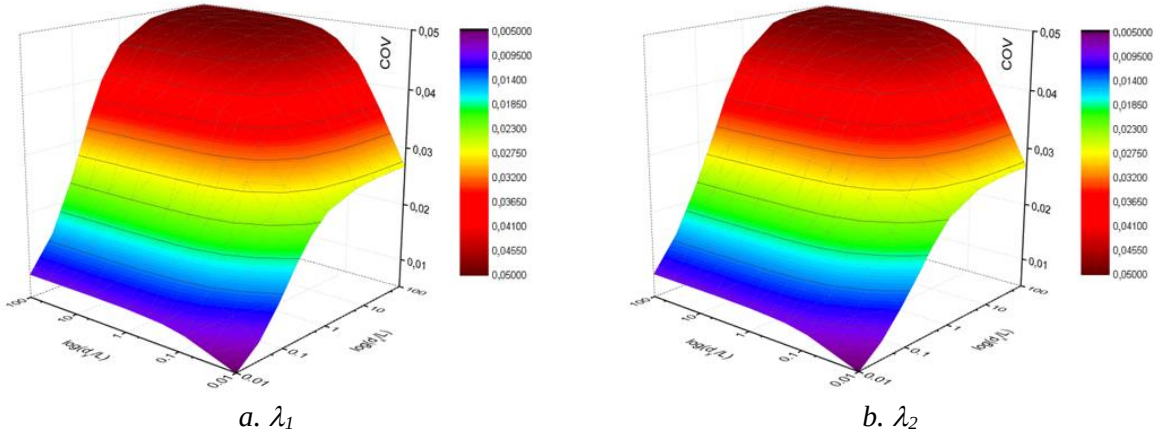
b, Quan hệ giữa σ_f của trường ngẫu nhiên hai chiều, ba chiều và COV của chuyển vị

Hình 4.6. So sánh ứng xử tĩnh của dầm trong trường hợp mô đun đàn hồi ngẫu nhiên hai chiều và ba chiều

4.2. Khảo sát định lượng đặc trưng động lực học tuyến tính của dầm có tính chất vật liệu ngẫu nhiên không gian

4.2.1. Phân tích ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến hệ số biến thiên giá trị riêng

4.2.1.1. Tính chất vật liệu ngẫu nhiên hai chiều



Hình 4.7. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến COV của trị riêng trong trường hợp dầm tính chất vật liệu ngẫu nhiên hai chiều ($\gamma = -0,5$)

Để đánh giá ảnh hưởng của cấu trúc không gian đến đặc trưng động lực học tuyến tính, nghiên cứu khảo sát sự biến thiên hệ số COV của giá trị riêng theo chiều dài tương quan 2D (trong dải từ $0,01L$ đến $100L$) với mức phân tán đầu vào $\sigma_f = \sigma_g = 0,05$. Khảo sát được triển khai toàn diện qua ba kịch bản độc lập: (i) chỉ có E ngẫu nhiên, (ii) chỉ có ρ ngẫu nhiên, và (iii) trường ngẫu nhiên gồm cả E và ρ kết hợp qua hệ số tương quan chéo $\gamma = \{-0,5; 0; 0,5\}$. Chuỗi dữ liệu phân tích (**Hình 4.7**) xác nhận một quy luật: tại dải tương quan ngắn, COV gia tăng mạnh do hiệu ứng trung bình hóa không gian. Tuy nhiên, khi chiều dài tương quan vượt qua kích thước dầm và tiến tới vô cùng, tốc độ tăng của COV dần bão hòa. Đường tiệm cận này là minh chứng toán học cho sự chuyển pha của hệ thống, nơi trường vật liệu hội tụ hoàn toàn về trạng thái đồng nhất, kéo theo đáp ứng ngẫu nhiên của dầm suy biến và tương đương với mô hình một biến ngẫu nhiên toàn cục.

4.2.1.2. Tính chất vật liệu ngẫu nhiên ba chiều

Nhằm đi sâu vào cơ chế truyền dẫn bất định trong không gian ba chiều, luận án mở rộng khảo sát COV của giá trị riêng dưới các tổ hợp chiều dài tương quan ($d_x = d_y, d_y = d_z, d_x = d_z$) cho cả ba kịch bản phân bố vật liệu (E ngẫu nhiên, ρ ngẫu nhiên, và trường E, ρ ngẫu nhiên). Chuỗi dữ liệu phân tích khẳng định quy luật chung: sự gia tăng của chiều dài tương quan làm suy giảm hiệu ứng trung bình hóa không gian, kéo theo sự gia tăng mức độ phân tán của giá trị riêng. Tuy nhiên, phát hiện quan trọng nhất được ghi nhận là mức độ chi phối vượt trội của chiều dài tương quan dọc trục (d_x) so với các phương mặt cắt (d_y, d_z). Về mặt cơ học, do trục là phương hình học và chịu lực chủ đạo của dầm, sự thẳng giáng vật liệu dọc theo chiều dài nhịp trực tiếp quyết định sự phân các vùng "cứng – mềm" cũng như sự phân bố khối lượng tham gia dao động của toàn hệ. Hệ quả là động lực học của kết cấu trở nên cực kỳ nhạy cảm với thành phần ngẫu nhiên dọc trục, khẳng định tính định hướng không gian của trường vật liệu đóng vai trò quyết định trong việc hình thành đặc trưng dao động ngẫu nhiên.

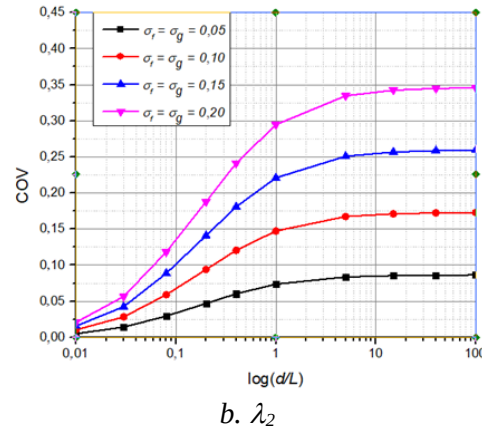
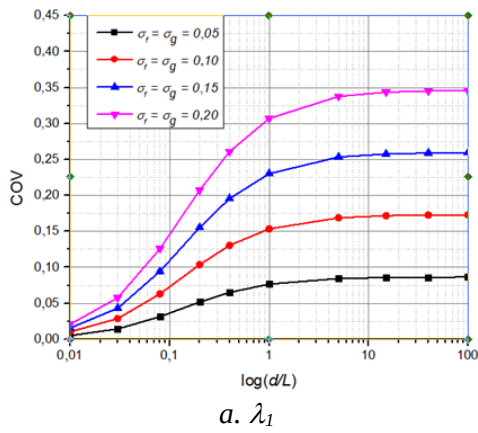
4.2.2. Phân tích ảnh hưởng của hệ số biến thiên tính chất vật liệu đến COV giá trị riêng

4.2.2.1. Tính chất vật liệu ngẫu nhiên hai chiều

Phân tích định lượng làm rõ mức độ chi phối của độ phân tán tính chất vật liệu đến COV của giá trị riêng. Kết quả khảo sát cho thấy quy luật: COV của đáp ứng dao động riêng luôn gia tăng tỉ lệ với độ lệch chuẩn của trường đầu vào. Đặc biệt, tại giới hạn chiều dài tương quan rất lớn (khi trường ngẫu nhiên suy biến thành biến ngẫu nhiên tổng thể), đặc trưng động lực học bộc lộ các quy luật tiệm cận toán học chặt chẽ phụ thuộc vào hệ số tương quan chéo giữa mô đun đàn hồi và mật độ khối lượng. Cụ thể, khi chỉ xét trường đơn biến, COV của giá trị riêng hội tụ về độ lệch chuẩn đầu vào. Tương quan âm hoàn toàn, hiệu ứng cộng hưởng nhiễu loạn giữa thành phần ngẫu nhiên của ma trận độ cứng và ma trận khối lượng đạt cực đại, COV tiệm cận về tổng độ lệch chuẩn của hai trường. Ngược lại, dưới điều kiện tương quan dương hoàn toàn, sự thẳng giáng đồng pha của ma trận độ cứng và ma trận khối lượng tự bù trừ và triệt tiêu lẫn nhau, khiến biến thiên của đáp ứng dao động giảm thiểu đáng kể. Đáng chú ý, khi hai trường vật liệu độc lập thống kê, COV hội tụ về mức xấp xỉ 1,4 lần độ lệch chuẩn trường ngẫu nhiên đầu vào.

4.2.2.2. Tính chất vật liệu ngẫu nhiên ba chiều

Ảnh hưởng của độ lệch chuẩn trường ngẫu nhiên ba chiều và chiều dài tương quan đến COV của giá trị riêng được khảo sát. Trường ngẫu nhiên của E và ρ được giả định thay đổi tương ứng với các giá trị: 0,05; 0,10; 0,15; và 0,20, $d_x = d_y = d_z = d$. Kết quả phân tích thể hiện **Hình 4.8**. Giá trị riêng có xu hướng tăng xung quanh giá trị kỳ vọng khi độ lệch chuẩn của trường ngẫu nhiên đầu vào tăng hoặc chiều dài tương quan tăng. Khi chiều dài tương quan đạt giá trị rất lớn thì COV có xu hướng tiệm cận đến độ lệch chuẩn của trường ngẫu nhiên trong trường hợp dầm chỉ có E hoặc ρ ngẫu nhiên ba chiều. Trong trường hợp dầm có E và ρ ngẫu nhiên ba chiều có mối tương quan âm tuyệt đối thì khi chiều dài tương quan theo các trục trong không gian có xu hướng vô cùng thì COV của giá trị riêng có xu hướng tiệm cận đến tổng độ lệch chuẩn các trường ngẫu nhiên. Trong khi các trường ngẫu nhiên là độc lập thống kê thì giá trị mà COV tiệm cận đến 70% tổng độ lệch chuẩn của các trường ngẫu nhiên.



Hình 4.8. Ảnh hưởng của độ lệch chuẩn trường ngẫu nhiên ba chiều đến COV của giá trị riêng ($\gamma = -0,5$)

4.2.3. Phân tích quan hệ giữa hệ số biến thiên của giá trị riêng và hệ số biến thiên của tính chất vật liệu ngẫu nhiên không gian

4.2.3.1. Tính chất vật liệu ngẫu nhiên hai chiều

Quan hệ giữa COV của giá trị riêng và độ lệch chuẩn của trường ngẫu nhiên hai chiều cũng chính là COV của tính chất vật liệu. Độ lệch chuẩn của trường ngẫu nhiên hai chiều được khảo sát tương ứng với các giá trị: 0; 0,05; 0,10; 0,15; và 0,20. Chiều dài tương quan theo các trục được xem xét tương ứng với bốn trường hợp: $d_x = d_y = 0,03L$, $d_x = d_y = 0,2L$, $d_x = d_y = 1L$, $d_x = d_y = 15L$. Trong trường hợp dầm chỉ có E hoặc ρ ngẫu nhiên hai chiều thì COV của giá trị riêng và COV của tính chất vật liệu đầu vào có quan hệ tuyến tính. Điều này cho thấy mức độ lan truyền bất định từ đầu vào đến đầu ra mang tính tuyến tính khi chỉ có một nguồn ngẫu nhiên chi phối.

4.2.3.2. Tính chất vật liệu ngẫu nhiên ba chiều

Quan hệ giữa COV của giá trị riêng và độ lệch chuẩn của trường ngẫu nhiên ba chiều được khảo sát trong các trường hợp của chiều dài tương quan bao gồm: $d_x = d_y = d_z = 0,03L$, $d_x = d_y = d_z = 0,2L$, $d_x = d_y = d_z = 1L$, và $d_x = d_y = d_z = 15L$. Đồng thời ba trường hợp ngẫu nhiên ba chiều của tính chất vật liệu cũng được nghiên cứu trong phần này bao gồm: Dầm chỉ có mô đun đàn hồi ngẫu nhiên ba chiều, dầm chỉ có mật độ khối lượng ngẫu nhiên ba chiều và dầm có đồng thời cả mô đun và mật độ khối lượng ngẫu nhiên ba chiều. Các trường ngẫu nhiên được xem xét là các trường ngẫu nhiên dừng có giá trị kỳ vọng bằng không. Do vậy có thể coi độ lệch chuẩn của trường ngẫu nhiên gần bằng với COV của yếu tố ngẫu nhiên đầu vào. Khi dầm chỉ có E hoặc ρ ngẫu nhiên ba chiều thì ghi nhận được quan hệ tuyến tính của COV của yếu tố ngẫu nhiên đầu vào và COV của trị riêng. Trong trường hợp dầm có đồng thời E và ρ ngẫu nhiên ba chiều thì quan hệ giữa COV của giá trị riêng và COV của yếu tố ngẫu nhiên đầu vào gần như tuyến tính.

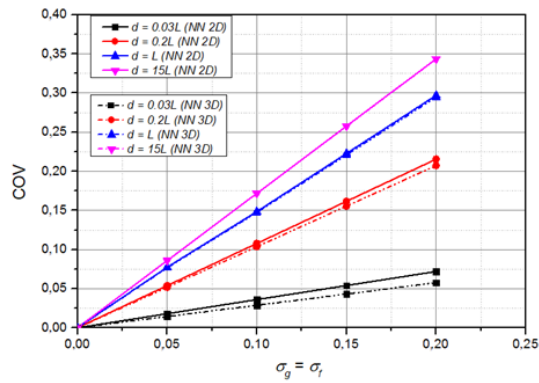
4.2.4. Phân tích ảnh hưởng mối tương quan giữa các trường ngẫu nhiên không gian tính chất vật liệu đến hệ số biến thiên giá trị riêng

Khảo sát định lượng đối với hệ số tương quan chéo (γ) giữa trường mô đun đàn hồi và mật độ khối lượng, $\gamma = \{-1,0; -0,5; 0; +0,5; +1,0\}$ kết hợp với các cấp độ thăng giáng đầu vào trên dải chiều dài tương quan từ $0,01L$ đến $100L$. Kết quả phân tích xác nhận mối tương quan âm: COV của giá trị riêng suy giảm khi γ tăng. Biến động của đáp ứng đạt cực đại tại ngưỡng tương quan âm tuyệt đối ($\gamma = -1,0$) và bị dập tắt gần như hoàn toàn tại ngưỡng tương quan dương tuyệt đối ($\gamma = 1,0$). Đặc biệt, tại giới hạn tiệm cận khi chiều dài tương quan tiến tới vô cùng, COV của hệ thống với $\gamma = -1,0$ hội tụ về mức hai lần giá trị độ lệch chuẩn của trường đầu vào.

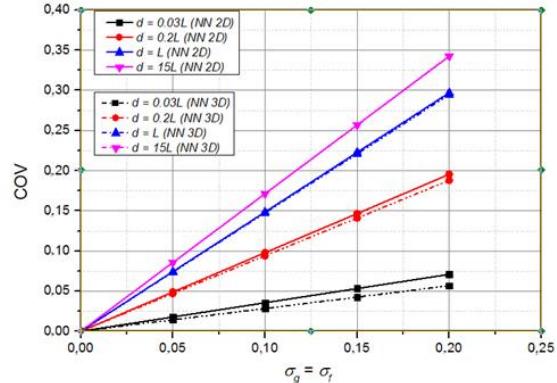
Bản chất cơ học của hiện tượng này bị chi phối trực tiếp bởi cấu trúc phương trình dao động. Ma trận độ cứng và ma trận khối lượng của hệ thống cấu thành từ cả thành phần tất định lẫn ngẫu nhiên. Khi tương quan âm hoàn hảo, sự biến thiên ngược pha tạo ra hiệu ứng cộng hưởng nhiễu loạn, đẩy mức độ thăng giáng của giá trị riêng lên cực đại. Ngược lại, khi tương quan dương hoàn hảo, sự biến thiên đồng pha của hai ma trận tạo ra cơ chế tự bù trừ, triệt tiêu đáng kể độ phân tán của đáp ứng tổng thể. Phát hiện này khẳng định hệ số tương quan chéo là một tham số điều kiện trong bài toán cơ học ngẫu nhiên. Việc bỏ qua hoặc giả định sai lệch đặc trưng tương quan giữa E và ρ sẽ dẫn đến những sai số trong công tác đánh giá độ tin cậy của kết cấu.

4.2.5. So sánh phân tích đặc trưng động lực học tuyến tính dầm có tính chất vật liệu ngẫu nhiên hai chiều và ba chiều

Nhằm đánh giá sự chi phối của bậc chiều không gian đến tính bất định của đặc trưng động lực học tuyến tính, nghiên cứu khảo sát COV của giá trị riêng giữa hai mô hình trường ngẫu nhiên 2D và 3D được thể hiện trong **Hình 4.9**. Dữ liệu phân tích tái khẳng định sức mạnh của cơ chế trung bình hóa không gian: tại các miền tương quan ngắn, sự gia tăng bậc không gian từ 2D lên 3D làm gia tăng số lượng các thể tích ngẫu nhiên độc lập. Sự gia tăng này giảm mức độ phân tán tổng thể, khiến COV của giá trị riêng trong mô hình 3D sụt giảm và luôn nhỏ hơn so với mô hình 2D. Ngược lại, khi chiều dài tương quan lớn, trường vật liệu ở cả hai mô hình đều tiến tới trạng thái đồng nhất và cùng suy biến thành một biến ngẫu nhiên toàn cục. Tại giới hạn tiệm cận này sự sai khác thống kê giữa mô hình 2D và 3D gần như bằng không, minh chứng trọn vẹn cho tính nhất quán của đáp ứng hệ thống bất chấp sự khuếch trương về số chiều không gian.



a. λ_1

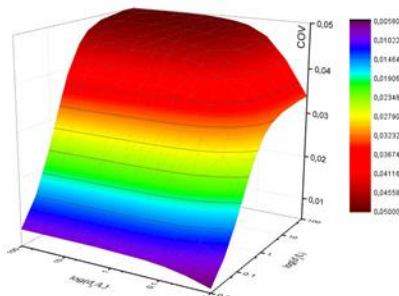


b. λ_2

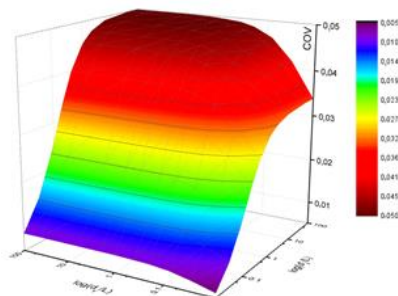
Hình 4.9. So sánh quan hệ giữa COV của trị riêng và COV của trường tính chất vật liệu ngẫu nhiên hai chiều và ba chiều ($\gamma = -0,5$)

4.3. Khảo sát định lượng ổn định Euler của cột có tính chất vật liệu ngẫu nhiên không gian

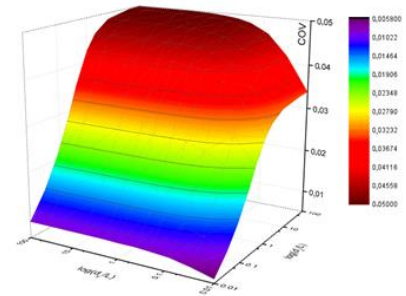
4.3.1. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan của trường ngẫu nhiên đến COV lực tới hạn



a, Cột C - F



b, Cột H - H



c, Cột C - C

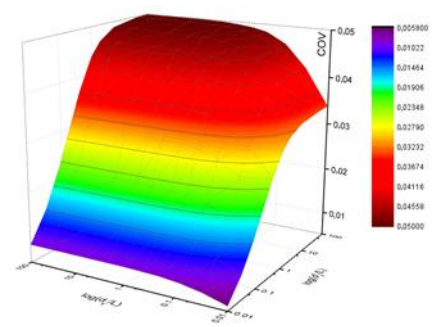
Hình 4.10. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến COV của lực tới hạn trong trường hợp mô đun đàn hồi ngẫu nhiên hai chiều

Để đánh giá tác động của cấu trúc tương quan không gian đến ổn định ngẫu nhiên của cột, luận án khảo sát COV của lực tới hạn Euler theo chiều dài tương quan (0,01L đến 100L, với độ lệch chuẩn đầu vào $\sigma_f = 0,05$) dưới các điều kiện biên khác nhau (**Hình 4.10**). Dữ liệu phân tích xác nhận quy luật đồng biến rõ rệt: tại dải tương quan ngắn, thăng giáng vật liệu diễn ra trong phạm vi hẹp, kích hoạt tối đa hiệu ứng trung bình hóa không gian. Cơ chế này triệt tiêu hiệu quả các nhiễu loạn cục bộ, giảm độ phân tán của lực tới hạn sát với giá trị kỳ vọng. Ngược lại, khi chiều dài tương quan tăng, sự biến thiên không gian diễn ra chậm khiến hiệu ứng trung bình hóa dần suy yếu, đẩy mức độ thăng giáng của toàn hệ thống lên cao. Tại giới hạn tiệm cận tiến tới vô cùng, trường ngẫu nhiên thoái hóa hoàn toàn thành một biến ngẫu nhiên tổng thể, kéo theo COV của lực tới hạn hội tụ về độ lệch chuẩn ban đầu của mô đun đàn hồi. Hơn thế nữa, kết quả khảo sát còn bộc lộ tính định hướng không gian đặc thù: xuất phát từ bản chất chịu nén, trạng thái ổn định của cột thể hiện độ nhạy đối với thành phần nhiễu loạn dọc trục so với chiều dài tương quan theo phương ngang tiết diện.

Mở rộng phân tích sang mô hình trường ngẫu nhiên ba chiều, nghiên cứu tiến hành đánh giá COV của lực tới hạn qua các tổ hợp tương quan: $d_y=d_z=d$ (với $d_x=d$); $d_x=d_z=d$ (với $d_y=d$) và $d_x=d_y=d$ (với $d_z=d$), trong đó d quét trên dải từ 0,01L đến 100L. Các kết quả thu được hoàn toàn nhất quán với quy luật đã thiết lập ở mô hình ngẫu nhiên hai chiều: COV gia tăng mạnh mẽ ở dải tương quan ngắn, bão hòa dần khi vượt qua kích thước đặc trưng của dầm, và tiệm cận tuyệt đối về giá trị độ lệch chuẩn đầu vào khi không gian tương quan tiến tới vô cùng. Đặc biệt, sự đối sánh trực tiếp giữa các trục không gian 3D một lần nữa làm nổi bật tính định hướng của hệ thống. Do trục x là phương chịu nén chủ đạo, sự thăng giáng vật liệu dọc chiều dài cấu kiện chi phối trực tiếp đến sự phân mảnh độ cứng tổng thể. Hệ quả là đáp ứng ổn định của cột thể hiện độ nhạy cảm vượt trội với biến động dọc trục so với các phương khác.

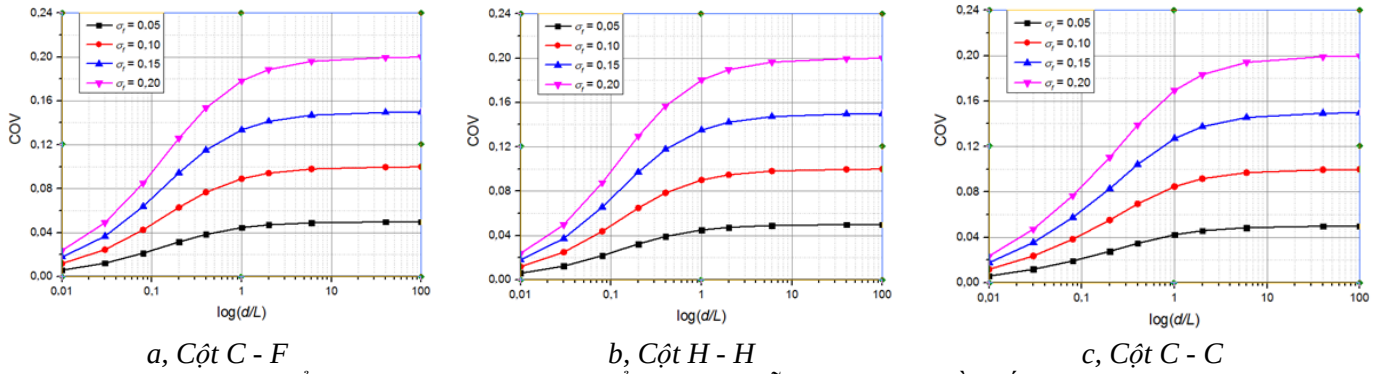
4.3.2. Phân tích ảnh hưởng của hệ số biến thiên mô đun đàn hồi đến COV lực tới hạn

Nhằm định lượng mức độ chi phối của biên độ thăng giáng tính chất vật liệu đến trạng thái ổn định của kết cấu, nghiên cứu mở rộng khảo sát COV của lực tới hạn theo độ lệch chuẩn của trường ngẫu nhiên kết hợp trên dải chiều dài tương quan từ 0,01L đến 100L. Dữ liệu phân tích đối với cả mô hình ngẫu nhiên hai chiều (**Hình 4.11**) và ngẫu nhiên ba chiều (**Hình 4.12**) khẳng định một tương quan dương chặt chẽ: COV của lực tới hạn gia tăng tỉ lệ thuận với độ lệch chuẩn của trường không gian (hệ số biến thiên của mô đun đàn hồi). Về bản chất cơ học, sự khuếch

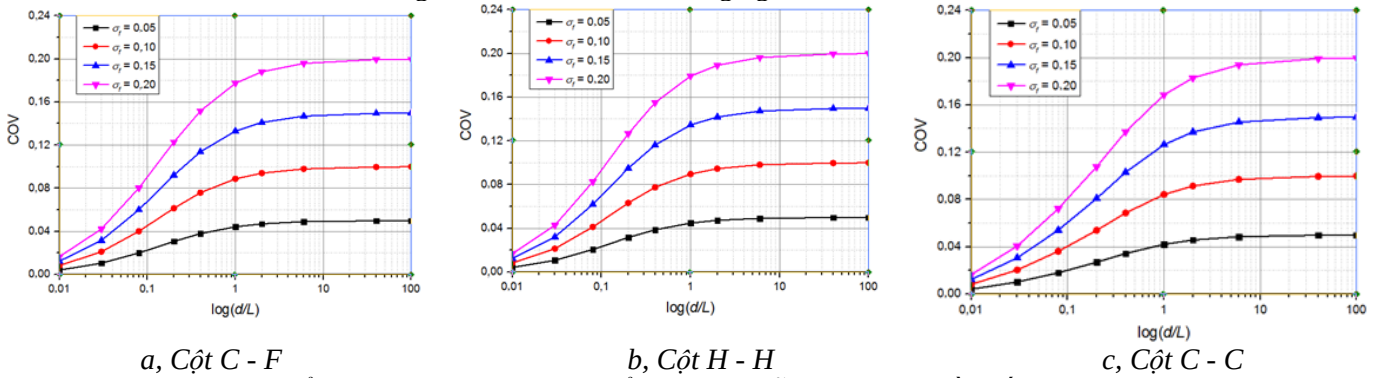


d, Cột C-H

đại độ lệch chuẩn đầu vào trực tiếp nói rộng phân tán của mô đun đàn hồi quanh giá trị kỳ vọng, tất yếu dẫn đến sự gia tăng tương ứng trong độ phân tán của tải tới hạn. Đồng thời, khi tham chiếu theo trục chiều dài tương quan, đáp ứng của hệ thống tiếp tục thể hiện tính phi tuyến: COV tăng mạnh tại dải tương quan ngắn, nhưng bão hòa dần tại dải tương quan lớn, hoàn toàn ăn khớp với quy luật tiệm cận lý thuyết đã thiết lập.

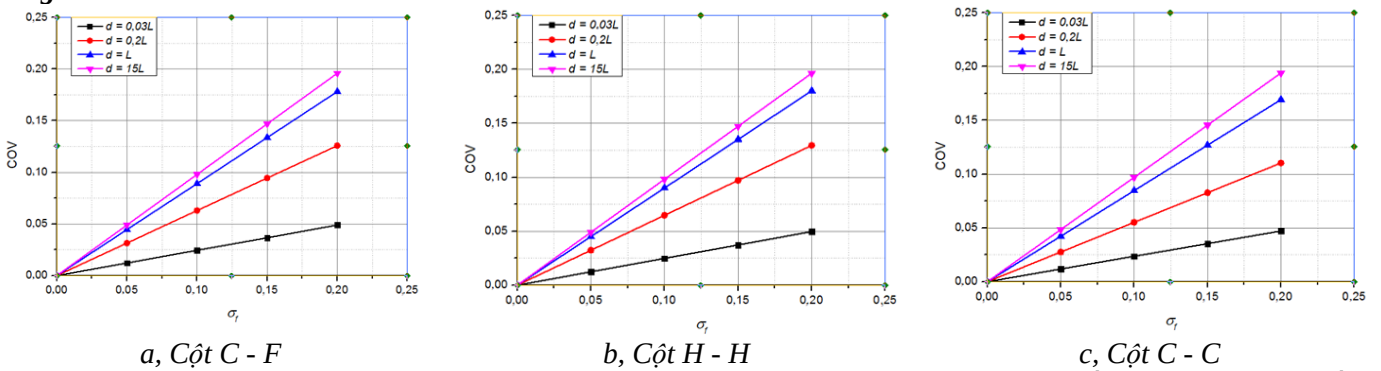


Hình 4.11. Ảnh hưởng của độ lệch chuẩn trường ngẫu nhiên hai chiều đến COV của lực tới hạn

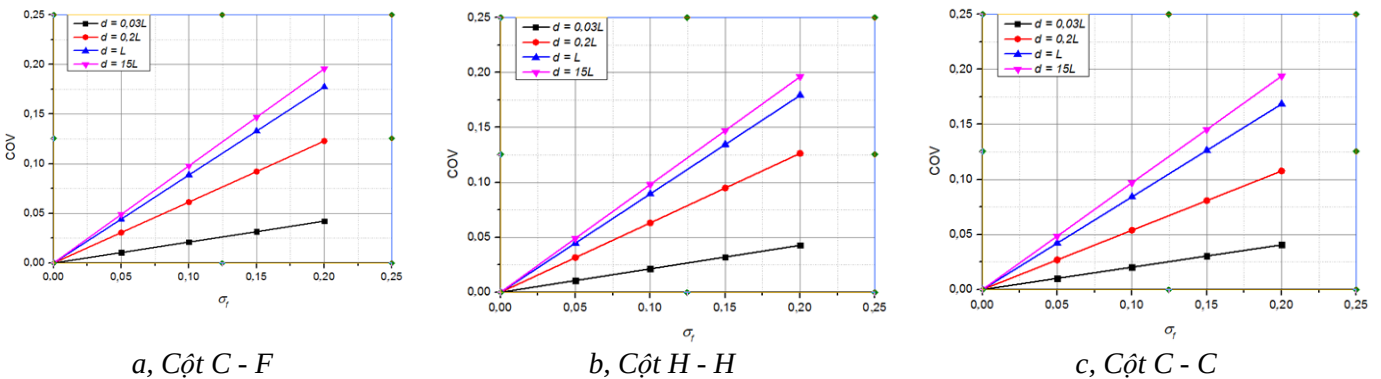


Hình 4.12. Ảnh hưởng của độ lệch chuẩn trường ngẫu nhiên ba chiều đến COV của lực tới hạn

4.3.3. Phân tích quan hệ giữa hệ số biến thiên lực tới hạn và hệ số biến thiên mô đun đàn hồi ngẫu nhiên không gian



Hình 4.13. Quan hệ giữa COV của lực tới hạn và COV của trường ngẫu nhiên hai chiều của mô đun đàn hồi



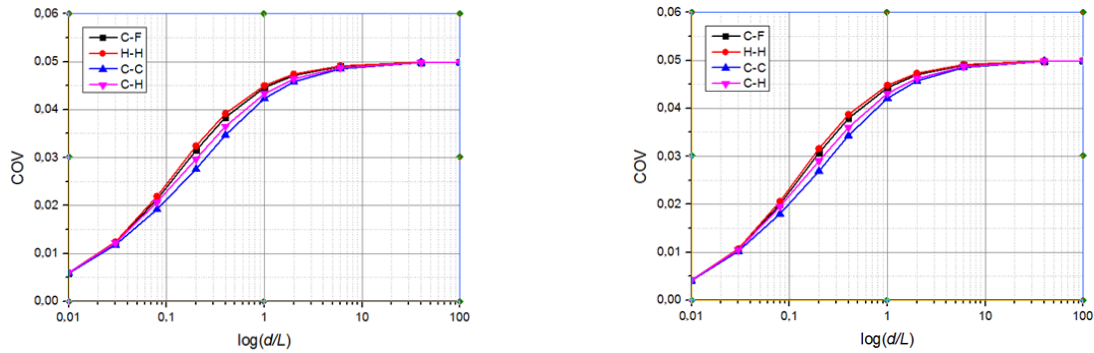
Hình 4.14. Quan hệ giữa COV của lực tới hạn và COV của trường ngẫu nhiên ba chiều của mô đun đàn hồi

Để định lượng hóa cơ chế truyền dẫn bất định trong bài toán ổn định, nghiên cứu tiến hành khảo sát mối quan hệ COV của lực tới hạn và mức độ phân tán của trường vật liệu. Khảo sát được triển khai đồng bộ trên cả hai mô hình trường ngẫu nhiên hai chiều (**Hình 4.13**) và ngẫu nhiên ba chiều (**Hình 4.14**) tại: $d = \{0,03L, 0,2L, 1L, 15L\}$. Dữ liệu phân tích xác nhận một quy luật trên mọi kịch bản: tồn tại mối tương quan tuyến tính trực tiếp giữa COV của lực tới hạn và hệ số biến thiên của mô đun đàn hồi. Phát hiện về tính tuyến tính này mang lại giá trị thực tiễn đối với

thiết kế, cung cấp cơ sở để dự báo độ dư trữ ổn định ngẫu nhiên của cột chỉ thông qua các đặc trưng thống kê cơ bản của vật liệu đầu vào.

4.3.4. Ảnh hưởng của liên kết hai đầu cột đến hệ số biến thiên lực tới hạn

Liên kết của hai đầu cột có ảnh hưởng trực tiếp đến độ lớn của lực tới hạn và dạng mất ổn định của cột. Khi cột có mô đun đàn hồi ngẫu nhiên không gian thì lực tới hạn cũng là một biến ngẫu nhiên. Ảnh hưởng của liên kết hai đầu cột đến COV là tương đối nhỏ khi so sánh với ảnh hưởng của tính ngẫu nhiên tính chất vật liệu, đặc biệt ở những chiều dài tương quan nhỏ hoặc chiều dài tương quan lớn có xu hướng vô cùng như **Hình 4.15**



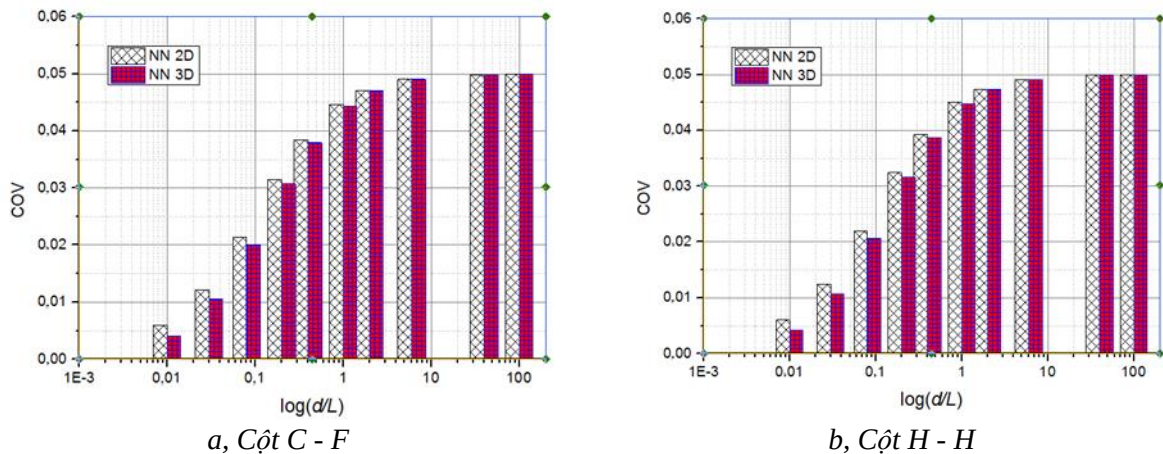
a, $\sigma_f = 0,05$; ngẫu nhiên hai chiều

b, $\sigma_f = 0,05$; ngẫu nhiên ba chiều

Hình 4.15. Ảnh hưởng của liên kết hai đầu thanh đến COV của lực tới hạn trong trường hợp mô đun đàn hồi ngẫu nhiên không gian

4.3.5. So sánh ổn định Euler của cột có mô đun đàn hồi ngẫu nhiên hai chiều và ba chiều

Khi mô đun đàn hồi của vật liệu được mô hình hóa như một trường ngẫu nhiên hai chiều, sự biến đổi ngẫu nhiên trong không gian của mô đun đàn hồi chỉ được xét trong phạm vi mặt phẳng là theo trục dọc và chiều cao của tiết diện. Ngược lại, trong trường hợp trường ngẫu nhiên ba chiều, mô đun đàn hồi được phân bố ngẫu nhiên trong toàn bộ thể tích của cột, phản ánh đầy đủ hơn tính không đồng nhất vật liệu trong không gian. Kết quả này dẫn đến sự khác biệt về đặc trưng ngẫu nhiên của đáp ứng được thể hiện trong **Hình 4.16**. Cụ thể, khi chiều dài tương quan không gian nhỏ hơn kích thước đặc trưng của cột, COV của lực tới hạn trong trường hợp mô đun đàn hồi ba chiều có giá trị nhỏ hơn so với trường hợp hai chiều. Điều này cho thấy đáp ứng ngẫu nhiên của cột ba chiều có mức độ phân tán nhỏ hơn quanh giá trị kỳ vọng, phản ánh tính ổn định thống kê cao hơn. Ngược lại, khi chiều dài tương quan không gian tăng và trở nên lớn so với kích thước cột khi đó COV của lực tới hạn trong hai trường hợp gần như giống nhau do các trường ngẫu nhiên không gian suy biến thành các biến ngẫu nhiên toàn cục.



a, Cột C - F

b, Cột H - H

Hình 4.16. So sánh COV của lực tới hạn, E ngẫu nhiên hai chiều và ba chiều

4.4. Kết luận chương IV

Trên cơ sở mô hình SFEM đã được xây dựng và kiểm chứng ở các chương trước, ảnh hưởng của trường tính chất vật liệu ngẫu nhiên đầu vào đến ứng xử cơ học của dầm và cột đã được khảo sát định lượng trọng tâm tại Chương IV. Từ các kết quả phân tích, những quy luật cốt lõi đã được đúc kết, bao gồm:

Ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến đáp ứng ngẫu nhiên của dầm, cột:

- ✓ **Hiệu ứng trung bình hóa thông kê:** Khi chiều dài tương quan nhỏ, sự biến thiên ngẫu nhiên nhanh của tính chất vật liệu gây ra hiệu ứng trung bình hóa mạnh làm giảm độ phân tán (COV) của đáp ứng ngẫu nhiên của dầm, cột.
- ✓ **Sự bão hòa độ phân tán:** Khi chiều dài tương quan tăng, COV của đáp ứng ngẫu nhiên tăng nhanh và dần bão hòa. Khi chiều dài tương quan tiến tới vô cùng, trường ngẫu nhiên chuyển trạng thái thành biến ngẫu nhiên toàn cục; lúc này COV của đáp ứng ngẫu nhiên của dầm, cột tiệm cận với COV của tính chất vật liệu đầu vào.
- ✓ **Tính chi phối có hướng:** Chiều dài tương quan theo phương dọc trực giữ vai trò chi phối đối với độ phân tán của đáp ứng so với các phương còn lại.

Ảnh hưởng của chiều không gian ngẫu nhiên (2D, 3D):

- ✓ Kết quả so sánh cho thấy sự khác biệt rõ rệt về hiệu ứng trung bình hóa giữa mô hình ngẫu nhiên 2D và 3D. Trong phạm vi chiều dài tương quan nhỏ, mô hình ngẫu nhiên 3D thể hiện hiệu ứng trung bình hóa mạnh mẽ hơn, dẫn đến COV đáp ứng ngẫu nhiên nhỏ hơn so với mô hình 2D.
- ✓ Tuy nhiên, khi chiều dài tương quan rất lớn, sự khác biệt giữa hai mô hình này bị triệt tiêu do cả hai đều tiệm cận về bài toán biến ngẫu nhiên đồng nhất.

Ảnh hưởng của tương quan chéo (Cross-Correlation): Đối với bài toán phân tích đặc trưng động lực học tuyến tính, mối tương quan giữa các trường ngẫu nhiên E và ρ chi phối mạnh mẽ độ phân tán của giá trị riêng:

- ✓ Tương quan âm hoàn hảo: Gây ra hiện tượng cộng gộp sự phân tán khiến COV của giá trị riêng đạt cực đại (tiệm cận tổng COV của E và ρ khi chiều dài tương quan có xu hướng lớn vô cùng).
- ✓ Tương quan dương hoàn hảo: Gây ra hiện tượng triệt tiêu ngẫu nhiên, làm giảm đáng kể sự phân tán của đáp ứng ngẫu nhiên giá trị riêng.

Mối quan hệ giữa COV đáp ứng ngẫu nhiên của dầm, cột và COV của tính chất vật liệu:

- ✓ Tồn tại mối tương quan dương và gần như tuyến tính giữa mức độ biến động (COV) của vật liệu đầu vào và COV của đáp ứng đầu ra. Đây là cơ sở quan trọng cho các bài toán dự báo độ tin cậy sơ bộ.

Độ nhạy của tính ngẫu nhiên không gian tính chất vật liệu và loại liên kết:

- ✓ So sánh độ nhạy cho thấy tính ngẫu nhiên không gian của vật liệu đóng vai trò quyết định so với điều kiện biên trong việc gây ra sự phân tán tải trọng tới hạn. Điều này nhấn mạnh tầm quan trọng của việc kiểm soát chất lượng vật liệu trong bài toán ổn định.

KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

I. Những đóng góp mới của Luận án

Luận án đã nghiên cứu và phát triển thành công phương pháp phần tử hữu hạn ngẫu nhiên (SFEM) nhằm phân tích đáp ứng cơ học của kết cấu dầm, cột có tính chất vật liệu ngẫu nhiên trong không gian. Những đóng góp khoa học chính của luận án được tổng kết như sau:

- 1. Phát triển và xác thực khung phân tích phần tử hữu hạn ngẫu nhiên cho kết cấu dầm, cột có tính chất vật liệu ngẫu nhiên không gian đa chiều:**
 - ✓ Tích hợp trường ngẫu nhiên đa chiều: Tích hợp trường ngẫu nhiên không gian (2D, 3D) Gaussian, dùng vào mô hình cơ học ngẫu nhiên của cấu kiện dầm và cột, mở rộng phạm vi phân tích so với các mô hình ngẫu nhiên một chiều (1D) truyền thống;
 - ✓ Thiết lập công cụ giải tích: Phát triển kỹ thuật tích phân trọng số kết hợp khai triển nhiễu loạn Taylor bậc nhất để thiết lập ma trận độ cứng và ma trận khối lượng ngẫu nhiên. Phương pháp này cho phép giải quyết các bài toán tĩnh ngẫu nhiên, động lực học tuyến tính ngẫu nhiên và ổn định Euler ngẫu nhiên, đồng thời xác định trực tiếp các đặc trưng thống kê bậc thấp (kỳ vọng, phương sai, hệ số biến thiên) đáp ứng ngẫu nhiên của dầm, cột mà không phụ thuộc vào phương pháp tính toán lặp;
 - ✓ Kiểm chứng độ tin cậy: Độ tin cậy của mô hình SFEM đã phát triển trong luận án được xác thực thông qua việc đánh giá tính hội tụ theo lưới phần tử, kiểm chứng sự tiệm cận nghiệm về bài toán tất định, và đối sánh với kết quả từ phương pháp mô phỏng Monte Carlo (MCS) và các nghiên cứu trước đây.
- 2. Làm sáng tỏ cơ chế vật lý ngẫu nhiên chi phối ứng xử kết cấu thông qua chiều dài tương quan và số chiều không gian (2D, 3D):**
 - ✓ Luận án đã định lượng ảnh hưởng của chiều dài tương quan không gian đối với sự phân tán đáp ứng cơ học ngẫu nhiên. Ở giới hạn chiều dài tương quan nhỏ, các thăng giáng cục bộ bị triệt tiêu bởi hiệu ứng trung bình hóa thống kê, giúp duy trì hệ số biến thiên (COV) ở mức thấp. Ngược lại, khi chiều dài tương quan tăng lớn, độ phân tán bị khuếch đại và bão hòa khi trường không gian suy biến thành một biến ngẫu nhiên toàn cục;
 - ✓ Phát hiện tính chi phối có hướng: Sự biến thiên ngẫu nhiên theo phương dọc trực thể hiện mức độ chi phối lớn nhất đến sự phân tán đáp ứng tổng thể của kết cấu so với sự biến thiên trên các phương của mặt cắt ngang.
- 3. Đánh giá ảnh hưởng của tương quan chéo giữa trường ngẫu nhiên mô đun đàn hồi và mật độ khối lượng đến đặc trưng động lực học tuyến tính ngẫu nhiên của kết cấu dầm:**
 - ✓ Phân tích cơ chế tương tác thống kê: Phân tích cơ chế tương tác thống kê giữa ma trận độ cứng và ma trận khối lượng dưới tác động của hệ số tương quan chéo của trường ngẫu nhiên của mô đun đàn hồi và trường ngẫu nhiên của mật độ khối lượng;
 - ✓ Chỉ ra sự khuếch đại phân tán: Khẳng định hệ số biến thiên (COV) của giá trị riêng (tần số dao động tự do) bị khuếch đại và đạt cực đại khi hai trường tính chất vật liệu có tương quan âm hoàn hảo;
 - ✓ Xác định cơ chế suy giảm độ bất định: Chứng minh sự phân tán của giá trị riêng giảm đáng kể khi hai trường ngẫu nhiên tính chất vật liệu có tương quan dương hoàn hảo, cung cấp cơ sở định lượng quan trọng trong phân tích động lực học tuyến tính của kết cấu dầm.
- 4. Thiết lập quy luật dự báo và khẳng định vai trò trọng yếu của tính biến thiên không gian trong phân tích ngẫu nhiên dầm, cột:**

- ✓ Xác lập quy luật dự báo: Phân tích định lượng chỉ ra mối tương quan đồng biến, xấp xỉ tuyến tính giữa hệ số biến thiên (COV) của các tham số vật liệu đầu vào và COV của đáp ứng đầu ra, tạo cơ sở cho việc dự báo nhanh mức độ bất định của hệ thống;
- ✓ Khẳng định vai trò chi phối: Thông qua phân tích độ nhạy trong bài toán ổn định Euler, nghiên cứu chứng minh tính biến thiên không gian của vật liệu đóng vai trò quyết định đối với sự phân tán của tải trọng tới hạn, thể hiện mức độ ảnh hưởng vượt trội so với ảnh hưởng của điều kiện biên.

II. Những hạn chế của Luận án

- ✓ Mô hình SFEM được xây dựng trong luận án dựa trên lý thuyết dầm Euler–Bernoulli
- ✓ Chưa xem xét ảnh hưởng cục bộ của trường ngẫu nhiên không gian, bỏ qua sự thay đổi vị trí trục trung hòa trong quá trình phân tích. Các trường hợp vật liệu có độ biến thiên mạnh chưa được xem xét.

III. Kiến nghị hướng nghiên cứu tiếp theo

Kiến nghị các hướng nghiên cứu nhằm mở rộng khả năng ứng dụng của phương pháp:

- ✓ Xem xét sự thay đổi vị trí trục trung hòa trong quá trình phân tích;
- ✓ Phát triển SFEM trên cơ sở lý thuyết biến dạng cắt bậc cao (HSDT) để phân tích dầm có chiều cao đáng kể;
- ✓ Mở rộng mô hình để xem xét các yếu tố ngẫu nhiên khác như tải trọng, kích thước hình học, điều kiện biên, hoặc sự suy giảm tính chất vật liệu theo thời gian;
- ✓ Kết hợp mô hình học sâu (Deep learning) và SFEM để dự đoán đáp ứng ngẫu nhiên của kết cấu.

DANH MỤC CÁC CÔNG BỐ KHOA HỌC

BÀI BÁO TIẾNG ANH

1. **Nguyen Dang Diem**, Ta Duy Hien (2025), "Stochastic finite element for stability of columns considering the two-dimensional random field of elastic modulus", *Results in Engineering* 25, pp. 104496. (Tập chí thuộc danh mục WoS/ESCI, Q1).
2. **Nguyen Dang Diem**, Ta Duy Hien (2025), "Free vibration of beams using stochastic finite element method considering three-dimensional randomness of material properties", *Forces in Mechanics* 19, pp. 100312. (Tập chí thuộc danh mục WoS/ESCI, Q2).
3. **Nguyen Dang Diem**, Pham Van Dat, Ta Duy Hien (2025), "Analysis of Beams with a Three-dimensional Random Field of the Modulus of Elasticity Using the Stochastic Finite Element Method", *International Journal of Mathematical, Engineering and Management Sciences* 10(5), pp. 1518-1538. (Tập chí thuộc danh mục WoS/ESCI, Q2).
4. **Nguyen Dang Diem**, Ta Duy Hien (2025), "Monte Carlo Simulation of a Beam Resting on an Elastic Foundation Considering the Two-Dimensional Stochastic Properties of the Elastic Modulus", *International Journal of Integrated Engineering* 17(5), pp. 65-76. (Tập chí thuộc danh mục WoS/ESCI, Q3).
5. **Nguyen Dang Diem**, Ta Duy Hien, Dao Sy Dan, Nguyen Duy Hung (2025), "Column Buckling under Stochastic Three-dimensional Material Properties: A Stochastic Finite Element Analysis", *Coupled Systems Mechanics* 14(4), pp. 347-369. (Tập chí thuộc danh mục WoS/ESCI, Q4).
6. **Nguyen Dang Diem**, Dao Sy Dan, Ta Duy Hien, Dao Ngoc Tien (2025), "Stochastic Stability Analysis of Columns with Randomly Elastic Joint Ends and Two-Dimensional Random Material Properties Using Monte Carlo Simulation", *Journal of Materials Engineering Structures* 12(1), pp. 73-83. (Tập chí thuộc danh mục WoS/ESCI).
7. **Nguyen Dang Diem**, Ta Duy Hien, Nguyen Trong Hiep, Dao Ngoc Tien (2025), "Analysis of free vibrations of a continuous beam considering the random stiffness of the supports and the two-dimensional random material properties using monte carlo simulation", *Journal of Mechanics of Continua and Mathematical Sciences* 20(4), pp. 1-19. (Tập chí thuộc danh mục Scopus, Q4).

ĐỀ TÀI NGHIÊN CỨU KHOA HỌC

1. Chủ nhiệm đề tài nghiên cứu Khoa học cấp Trường, Phân tích ổn định của cột có mô đun đàn hồi thay đổi ngẫu nhiên ba chiều, T2025-PHII_CT-006, Trường Đại học Giao thông vận tải, 2025